一般選抜試験　前期 (A 日程)

数　学

（ 問題：全６ページ ）

（ 解答番号： $\boxed{1}$ ～ $\boxed{73}$ ）

数学の問題には，必答問題と学科別問題があります。
第１問は記述解答問題です。記述問題解答用紙に解答してください。
記述問題解答用紙には受験番号，氏名を必ず記入してください。

$\boxed{\text{必答問題}}$　第１問および第２問は必ず解答してください。

（ 第１問　　　　記述問題解答用紙に解答 ）

（ 第２問　解答番号： $\boxed{1}$ ～ $\boxed{15}$ ）

$\boxed{\text{学科別問題}}$

機械システム工学科，電子ロボット工学科，および情報メディア学科を志願して学内併願を希望の志願者

第３問と第４問を解答してください。

（ 第３問　解答番号： $\boxed{16}$ ～ $\boxed{29}$ ）

（ 第４問　解答番号： $\boxed{30}$ ～ $\boxed{42}$ ）

情報メディア学科の専願志願者

第５問と第６問を解答してください。

（ 第５問　解答番号： $\boxed{43}$ ～ $\boxed{57}$ ）

（ 第６問　解答番号： $\boxed{58}$ ～ $\boxed{73}$ ）

第1問　(必答問題)

以下の記述解答問題を，記述問題解答用紙に解答せよ。

　半径 $\sqrt{21}$ の円に内接する四角形ABCDにおいて，A が鈍角であり，4つの辺のうち，$\mathrm{AB} = \mathrm{CD} = 6$，$\mathrm{DA} = 3$ であるとき，残りの辺BCの長さを求めよ。

第2問　(必答問題)

以下の式中または文中の $\boxed{\ 1\ }$ ～ $\boxed{15}$ に入る正しい数字 (0 ～ 9) を，マークシート上の該当する番号 1 ～ 15 の解答欄にマークして答えよ。

［1］　$\dfrac{1}{\sqrt{5}-2}$ の小数部分を a とするとき，$a-\dfrac{1}{a}=-\boxed{\ 1\ }$ となる。

これを用いると，$a^2+\dfrac{1}{a^2}=\boxed{\ 2\ }\boxed{\ 3\ }$，$a^3-\dfrac{1}{a^3}=-\boxed{\ 4\ }\boxed{\ 5\ }$ となる。

［2］　$\dfrac{1}{2}\leqq x\leqq 4$ のとき，関数 $y=\left(\log_2\dfrac{x}{2}\right)\cdot(\log_2 8x)$ の最大値と最小値を求めよう。

$t=\log_2 x$ とおくと，t の値の範囲は，$-\boxed{\ 6\ }\leqq t\leqq\boxed{\ 7\ }$ となる。

また，$y=\left(t+\boxed{\ 8\ }\right)^2-\boxed{\ 9\ }$ となるから，y は

$t=\boxed{10}$ すなわち，$x=\boxed{11}$ のとき，最大値 $\boxed{12}$ をとり，

$t=-\boxed{13}$ すなわち，$x=\dfrac{1}{\boxed{14}}$ のとき，最小値 $-\boxed{15}$ をとる。

第3問　(学科別問題)　(機械システム工学科／電子ロボット工学科／情報メディア学科を志願して学内併願希望の志願者は，この問題を選択して解答せよ。)

以下の式中または文中の $\boxed{16}$ ～ $\boxed{29}$ に入る正しい数字 (0 ～ 9) を，マークシート上の該当する番号 16 ～ 29 の解答欄にマークして答えよ。ただし，分数形で解答する場合は，既約分数（それ以上約分できない分数）の形で答えよ。

1 辺の長さが 1 の正四面体 OABC において，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とする。

正四面体に内接する球の中心を P とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表そう。

正四面体 OABC に内接している球が，各面 (正三角形) の重心で接していることと，特に △ABC の重心を G としたとき，点 P が線分 OG 上にあることに注意すると，ある実数 k を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = k\,\overrightarrow{\mathrm{OG}}$$

と表される。さらに，点 G は，△ABC の重心であるから，$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \dfrac{1}{\boxed{16}}\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)$

となる。したがって，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{k}{\boxed{16}}\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

一方，△OAB の重心を H とすると，$\overrightarrow{\mathrm{HP}}$ と △OAB は垂直だから，特に

$$\overrightarrow{\mathrm{HP}}\cdot\vec{a} = \boxed{17} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

となる。これを満たすように，k の値を定めよう。

① より，$\overrightarrow{\mathrm{HP}}$ は $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ と k を用いて，

$$\overrightarrow{\mathrm{HP}} = \frac{k-\boxed{18}}{\boxed{19}}\vec{a} + \frac{k-\boxed{20}}{\boxed{19}}\vec{b} + \frac{k}{\boxed{19}}\vec{c}$$

と表される。これを ② の左辺に代入して，

$\vec{a}\cdot\vec{a} = \boxed{21}$，$\vec{b}\cdot\vec{a} = \dfrac{\boxed{22}}{\boxed{23}}$，$\vec{c}\cdot\vec{a} = \dfrac{\boxed{24}}{\boxed{25}}$ を用いると，$k = \dfrac{\boxed{26}}{\boxed{27}}$ となる。

よって，① より，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \dfrac{\boxed{28}}{\boxed{29}}\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)$ が得られる。

第4問　(学科別問題)　(機械システム工学科／電子ロボット工学科／情報メディア学科を志願して学内併願希望の志願者は，この問題を選択して解答せよ。)

以下の式中または文中の $\boxed{30}$ ～ $\boxed{42}$ に入る正しい数字 (0 ～ 9) を，マークシート上の該当する番号 30 ～ 42 の解答欄にマークして答えよ。

座標平面上に曲線 $C: y = \dfrac{1}{x}$ と点 $\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{4},\ 3\right)$ がある。

まず，点Pから曲線 C に引いた接線の方程式を求めよう。

曲線 C 上の接点を $\mathrm{A}\left(a,\ \dfrac{1}{a}\right)$ とすると，点Aにおける接線の方程式は，

$$y = -\frac{\boxed{30}}{a^2}x + \frac{\boxed{31}}{a} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

と表される。これが点Pを通るから，a に関する2次方程式が得られる。これを解いて，① の右辺に代入すると，接線の方程式は，

$$y = -\boxed{32}\,\boxed{33}\,x + \boxed{34}\,\boxed{35}, \quad y = -\boxed{36}\,x + \boxed{37}$$

となる。

次に，これらの接線と曲線 C とで囲まれた図形の面積 S を求めよう。

定積分を用いて計算すると，

$$S = \int_{\frac{1}{\boxed{39}}}^{\frac{1}{\boxed{38}}} \left\{\frac{1}{x} - \left(-\boxed{32}\,\boxed{33}\,x + \boxed{34}\,\boxed{35}\right)\right\} dx$$

$$+ \int_{\frac{1}{\boxed{38}}}^{\frac{1}{\boxed{40}}} \left\{\frac{1}{x} - \left(-\boxed{36}\,x + \boxed{37}\right)\right\} dx$$

$$= \log \boxed{41} - \boxed{42}$$

となる。

第5問　(学科別問題)　(情報メディア学科専願の志願者は，この問題を選択して解答せよ。)

以下の式中または文中の $\boxed{\text{4 3}}$ ～ $\boxed{\text{5 7}}$ に入る正しい数字 (0 ～ 9) を，マークシート上の該当する番号 43 ～ 57 の解答欄にマークして答えよ。

500 円硬貨，100 円硬貨，50 円硬貨の 3 種類の硬貨がある。

(1) 3 種類の硬貨を使って，1000 円支払う方法は何通りあるか考えよう。ただし，硬貨は何枚使ってもよいし，また，使わない硬貨があってもよいものとする。

500 円硬貨，100 円硬貨，50 円硬貨の枚数をそれぞれ x，y，z とすると，これらは 0 以上の整数で

$$\boxed{\text{4 3}}\boxed{\text{4 4}}x + \boxed{\text{4 5}}y + z = \boxed{\text{4 6}}\boxed{\text{4 7}} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

を満たす。このとき，$\boxed{\text{4 3}}\boxed{\text{4 4}}x \leqq \boxed{\text{4 6}}\boxed{\text{4 7}}$ であるから，① を満たす整数 x の最大値は，$\boxed{\text{4 8}}$ である。

したがって，$0 \leqq x \leqq \boxed{\text{4 8}}$ の範囲の整数 x の値をそれぞれ ① に代入して，整数 y，z の組を求めると，3 種類の硬貨を使って，1000 円支払う方法は，全部で $\boxed{\text{4 9}}\boxed{\text{5 0}}$ 通りある。

(2) 3 種類の硬貨をそれぞれ 1 枚以上使って，1000 円支払う方法は何通りあるか考えよう。ただし，硬貨は 1 枚以上であれば何枚使ってもよいものとする。

あらかじめ，3 種類の硬貨をそれぞれ 1 枚ずつ使って，1000 円からこれらを差し引いた残りの額について，支払う方法を考える。このときの 500 円硬貨，100 円硬貨，50 円硬貨の枚数をそれぞれ x，y，z とすると，x，y，z は 0 以上の整数で

$$\boxed{\text{4 3}}\boxed{\text{4 4}}x + \boxed{\text{4 5}}y + z = \boxed{\text{5 1}}$$

を満たす。

したがって，前問 (1) と同じように考えると，3 種類の硬貨をそれぞれ 1 枚以上使って，1000 円支払う方法は，全部で $\boxed{\text{5 2}}$ 通りある。

(3) 3 種類の硬貨の使える枚数をそれぞれ 3 枚までとすると，支払える金額は何通りあるか考えよう。ただし，支払うときは 1 枚以上の硬貨を使うものとする。

100 円硬貨 3 枚と 50 円硬貨 3 枚を使ってできる金額は，0 円も含めて，$\boxed{\text{5 3}}\boxed{\text{5 4}}$ 通りある。

また，500 円硬貨 3 枚を使ってできる金額は，0 円も含めて，$\boxed{\text{5 5}}$ 通りある。

よって，支払える金額は，0 円の場合を除いて，全部で $\boxed{\text{5 6}}\boxed{\text{5 7}}$ 通りある。

第6問　(学科別問題)　(情報メディア学科専願の志願者は，この問題を選択して解答せよ。)

以下の式中または文中の $\boxed{58}$ ～ $\boxed{73}$ に入る正しい数字 (0 ～ 9) を，マークシート上の該当する番号 58 ～ 73 の解答欄にマークして答えよ。

座標平面上に曲線 C : $y = x^3 - 2x$ と曲線 C 上の点 $\mathrm{P}(2,\ 4)$ があり，曲線 C 上の点 P における接線を l とする。

(1) 接線 l の方程式は，$y = \boxed{58}\boxed{59}\,x - \boxed{60}\boxed{61}$ である。

(2) 接線 l と平行な直線の方程式を $y = \boxed{58}\boxed{59}\,x + k$ とするとき，この直線と曲線 C との共有点の個数は，

$k < -\boxed{62}\boxed{63}$, $\boxed{64}\boxed{65} < k$ のとき，$\boxed{66}$ 個
$k = -\boxed{62}\boxed{63}$, $\boxed{64}\boxed{65}$ のとき，$\boxed{67}$ 個
$-\boxed{62}\boxed{63} < k < \boxed{64}\boxed{65}$ のとき，$\boxed{68}$ 個

となる。

(3) 曲線 C と接線 l とで囲まれた図形の面積 S を定積分を用いて計算すると，

$$
\begin{aligned}
S &= \int_{-\boxed{70}}^{\boxed{69}} \left\{ x^3 - 2x - \left(\boxed{58}\boxed{59}\,x - \boxed{60}\boxed{61} \right) \right\} dx \\
&= \boxed{71}\boxed{72}\boxed{73}
\end{aligned}
$$

となる。