一般選抜問題　前期（A日程）

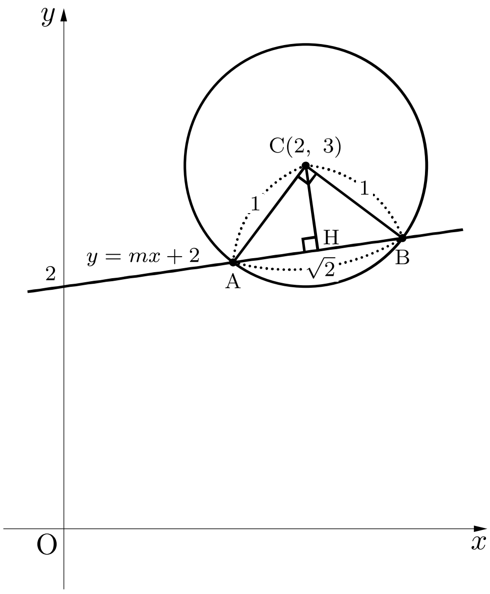
数　学

（配点と解答例）

第１問　（必答問題）　　配点：25 点

直線 $y = mx + 2$ が円 $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 12 = 0$ によって切り取られる線分の長さが $\sqrt{2}$ のとき，定数 m の値をすべて求めよ。

［解答］　円の方程式を変形すると，$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 1$ となるから，円の中心の座標は $(2,\ 3)$，半径は 1 である。直線と円との交点を A，B，円の中心を C，点 C から直線へ下ろした垂線を CH とすると，右の図より，$\mathrm{AC} = \mathrm{BC} = 1$，$\mathrm{AB} = \sqrt{2}$ であるから，$\mathrm{AC}^2 + \mathrm{BC}^2 = \mathrm{AB}^2$ より，$\triangle\mathrm{ABC}$ は $\mathrm{AC} = \mathrm{BC}$ $\angle\mathrm{ACB} = 90^\circ$ の直角二等辺三角形となる。さらに，$\triangle\mathrm{ACH}$ も $\mathrm{AH} = \mathrm{CH}$ の直角二等辺三角形となるから，$\mathrm{CH} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ となる。一方，CH は点 C と直線との距離でもあるから，



$$\mathrm{CH} = \frac{|2m + 2 - 3|}{\sqrt{m^2+1}} = \frac{|2m-1|}{\sqrt{m^2+1}}$$

となる。したがって，

$$\frac{|2m-1|}{\sqrt{m^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \cdots\cdots ①$$

となる。両辺 2 乗して整理すると，$7m^2 - 8m + 1 = 0$ より，$(7m-1)(m-1) = 0$ となる。

$m = \dfrac{1}{7}$, 1 は ① を満たすから，定数 m の値は，$m = \dfrac{1}{7}$, 1 $\cdots$（答え）

第2問　（必答問題）　**配点：25点**

$0 \leqq \theta \leqq \pi$ のとき，方程式

$$\sin 2\theta + \sqrt{6}\,(\sin\theta + \cos\theta) = \frac{7}{2} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

の解 θ を求める。

$t = \sin\theta + \cos\theta$ とおくと，$t^2 = \sin^2\theta + \cos^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta = 1 + \sin 2\theta$ より，① は

$$\boxed{2}\,t^2 + \boxed{2}\sqrt{6}\,t - \boxed{9} = 0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

となる。

また，$t = \sqrt{\boxed{2}}\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{\boxed{4}}\right)$ より，$0 \leqq \theta \leqq \pi$ のとき，

$$\frac{\pi}{\boxed{4}} \leqq \theta + \frac{\pi}{4} \leqq \frac{\boxed{5}}{\boxed{4}}\pi \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

となるから，t のとり得る値の範囲は，

$$-\boxed{1} \leqq t \leqq \sqrt{\boxed{2}} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ④$$

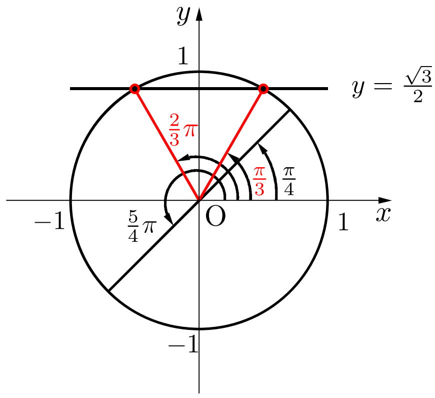
となる。④ の範囲で ② を t について解くと，$t = \dfrac{\sqrt{\boxed{6}}}{\boxed{2}}$ となる。

したがって，③ の範囲で $\sqrt{2}\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$

すなわち，$\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を θ について解くと，

$\theta + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{3}$，$\dfrac{2}{3}\pi$ より，① の解 θ は，

$\theta = \dfrac{\pi}{\boxed{1}\boxed{2}}$，$\dfrac{\boxed{5}}{12}\pi$ となる。



解答番号	正　解	配　点	備　考
1	2	5	
2	2		
3	9		
4	2	4	
5	4		
6	4	4	
7	5		
8	4		

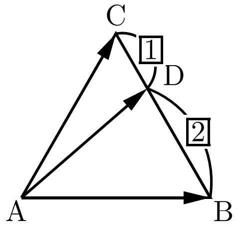
解答番号	正　解	配　点	備　考
9	1	4	
10	2		
11	6	4	
12	2		
13	1	4	
14	2		
15	5		

第3問　（学科別問題）　（K／R科またはJ科（学内併願）志願者選択）　配点：25点

1辺の長さが1の正三角形ABCにおいて，辺BCを2 : 1に内分する点をDとする。

$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \dfrac{1}{\boxed{3}}\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \boxed{2}\,\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)$ と $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \dfrac{\boxed{1}}{\boxed{2}}$ から

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \dfrac{1}{3}\left(|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2 + 2\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right) = \dfrac{\boxed{2}}{\boxed{3}}$ となる。

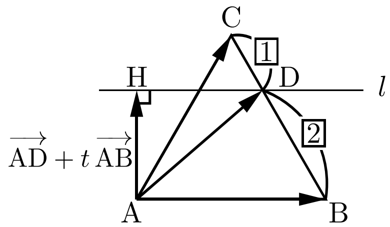


一方，$|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|^2 = \dfrac{1}{9}\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}} + 2\,\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}} + 2\,\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right) = \dfrac{1}{9}\left(|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2 + 4\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} + 4\,|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2\right) = \dfrac{7}{9}$ より，

$|\overrightarrow{\mathrm{AD}}| = \dfrac{\sqrt{\boxed{7}}}{\boxed{3}}$ となる。さらに，$\cos\angle\mathrm{BAD} = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AD}}|} = \dfrac{\boxed{2}}{\sqrt{\boxed{7}}}$ となる。

また，t が実数全体を動くとき，

$$\begin{aligned}
|\overrightarrow{\mathrm{AD}} + t\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2 &= \left(\overrightarrow{\mathrm{AD}} + t\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{AD}} + t\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)\\
&= |\overrightarrow{\mathrm{AD}}|^2 + 2t\,\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t^2\,|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2\\
&= t^2 + \frac{4}{3}t + \frac{7}{9} = \left(t + \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{1}{3}
\end{aligned}$$



より，$|\overrightarrow{\mathrm{AD}} + t\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2$ は，$t = -\dfrac{2}{3}$ のとき，最小値 $\dfrac{1}{3}$ をとる。このとき，$|\overrightarrow{\mathrm{AD}} + t\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}| \geqq 0$ より，

$|\overrightarrow{\mathrm{AD}} + t\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$ も最小となるから，$|\overrightarrow{\mathrm{AD}} + t\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$ は，$t = -\dfrac{\boxed{2}}{\boxed{3}}$ のとき，最小値 $\dfrac{\boxed{1}}{\sqrt{\boxed{3}}}$ をとる。

[別解]　右上の図において，点Dを通り，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ に平行な直線を l，点Aから直線 l へ下ろした垂線をAHとすると，t が実数全体を動くとき，$|\overrightarrow{\mathrm{AD}} + t\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$ の最小値は，点Aと直線 l との距離AHである。このとき，$\overrightarrow{\mathrm{AH}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ であるから，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} = 0$ より，$\left(\overrightarrow{\mathrm{AD}} + t\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \dfrac{2}{3} + t = 0$ すなわち，$t = -\dfrac{2}{3}$ となる。さらに，$\overrightarrow{\mathrm{DH}} = -\dfrac{2}{3}\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ より，$\mathrm{DH} = \dfrac{2}{3}$ となる。したがって，△AHDにおいて，三平方の定理より，$\mathrm{AH} = \sqrt{\mathrm{AD}^2 - \mathrm{DH}^2} = \sqrt{\dfrac{7}{9} - \dfrac{4}{9}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ となり，この値が $|\overrightarrow{\mathrm{AD}} + t\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$ の最小値となる。

解答番号	正　解	配　点	備　考
16	3	3	
17	2		
18	1	3	
19	2		
20	2	4	
21	3		

解答番号	正　解	配　点	備　考
22	7	4	
23	3		
24	2	3	
25	7		
26	2	4	
27	3		
28	1	4	
29	3		

第４問　（学科別問題）　（Ｋ／Ｒ科またはＪ科（学内併願）志願者選択）　配点：25 点

関数

$$y = \frac{2x^2 - 3x}{x - 2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{①}$$

によって表される曲線を C とする。

① は $y = 2x + 1 + \dfrac{2}{x-2}$ と変形される。したがって，$\displaystyle\lim_{x \to 2-0} y = -\infty$，$\displaystyle\lim_{x \to 2+0} y = \infty$，

$\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \{y - (2x+1)\} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2}{x-2} = 0$，$\displaystyle\lim_{x \to \infty} \{y - (2x+1)\} = \lim_{x \to \infty} \frac{2}{x-2} = 0$ より，

① の漸近線の方程式は，$x = \boxed{2}$，$y = \boxed{2}\,x + \boxed{1}$ である。

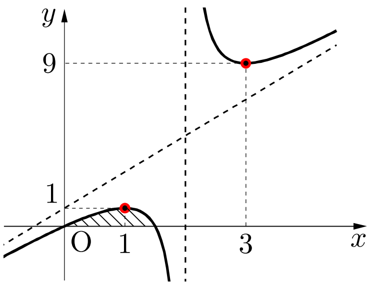
$f(x) = 2x + 1 + \dfrac{2}{x-2}$ とおくと，曲線 C の原点における接線の方程式は，$y = f'(0)x$ と表される。

したがって，$f'(x) = 2 - \dfrac{2}{(x-2)^2}$ より，$f'(0) = \dfrac{3}{2}$ となるから，接線の方程式は，$y = \dfrac{\boxed{3}}{\boxed{2}}x$

である。

$f'(x) = \dfrac{2(x-1)(x-3)}{(x-2)^2}$ より，① の増減と曲線 C の概形との対応は次のようになる。

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	／	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	1	↘	／	↘	9	↗



したがって，① は $x = \boxed{1}$ のとき，極大値 $\boxed{1}$ をとり，$x = \boxed{3}$ のとき，極小値 $\boxed{9}$ をとる。

① と x 軸との交点の x 座標は，$x = 0$，$\dfrac{3}{2}$ で，$0 \leqq x \leqq \dfrac{3}{2}$ のとき，$y \geqq 0$ である。

したがって，曲線 C と x 軸で囲まれた図形の面積は，

$$\int_0^{\frac{3}{2}} \left(2x + 1 + \frac{2}{x-2}\right) dx = \Big[x^2 + x + 2\log|x-2|\Big]_0^{\frac{3}{2}} = \frac{\boxed{1}\boxed{5}}{\boxed{4}} - \boxed{4}\log 2$$

である。

解答番号	正　解	配　点	備　考
30	2	2	
31	2	3	
32	1		
33	3	4	
34	2		
35	1	5	
36	1		

解答番号	正　解	配　点	備　考
37	3	5	
38	9		
39	1	6	
40	5		
41	4		
42	4		

第５問　（学科別問題）　（Ｊ科専願志願者選択）　配点：25 点

5 個の数字 0，1，2，3，4 から異なる数字を 4 個選んで，4 桁の整数を作る。

(1)　4 桁の整数について，千の位は 5 個の数字のうちで，0 は除かれるから，4 通りある。残りの下 3 桁は ${}_4P_3$ 通りある。したがって，4 桁の整数は $4 \times {}_4P_3 = 4 \times 4 \times 3 \times 2 =$ $\boxed{9}\boxed{6}$ 個ある。

(2)　4 桁の奇数について，一の位は 1 と 3 の 2 通りある。次に千の位は残り 4 個の数のうち，0 は除かれるから 3 通りある。残りの 2 桁は ${}_3P_2$ 通りある。したがって，4 桁の奇数は $2 \times 3 \times {}_3P_2 = 36$ 個あるから，4 桁の偶数は $96 - 36 =$ $\boxed{6}\boxed{0}$ 個ある。

(3)　各桁の数字の和が 10 になる 4 桁の整数は，0 を除いた 4 個の数字で作られる。そのうちで奇数は，一の位が 1 と 3 の 2 通りある。残りの上 3 桁は ${}_3P_3$ 通りある。したがって，各桁の数字の和が 10 になる奇数は $2 \times {}_3P_3 =$ $\boxed{1}\boxed{2}$ 個ある。

(4)　4 桁の 3 の倍数について，各桁の数字の和は 3 の倍数になる。5 個の数字の和は 10 であるから，5 個の数字のうちで 1 または 4 を除いた 4 個の数字を使えばよい。千の位は 0 を除いた 3 通りで，残りの下 3 桁は ${}_3P_3$ 通りある。したがって，3 の倍数は $2 \times 3 \times {}_3P_3 =$ $\boxed{3}\boxed{6}$ 個ある。

(5)　4 桁の整数の中で，千の位が 1 または 2 となる整数は，それぞれ ${}_4P_3 = 24$ 個ある。また，上 2 桁が 30 または 31 となる整数は，それぞれ ${}_3P_2 = 6$ 個ある。したがって，上 2 桁が 32 で最小となる 3201 は $48+12+1 = 61$ 番目に小さい数となるから，3210 は 62 番目に小さい 3204 をはさんで $\boxed{6}\boxed{3}$ 番目に小さい整数である。

(6)　4 桁の整数の中で，2000 より小さい整数は，千の位が 1 となる整数であるから，${}_4P_3 = 24$ 個ある。一方，4000 より大きい整数は，千の位が 4 となる整数であるから，${}_4P_3 = 24$ 個ある。したがって，2000 以上 4000 以下の範囲に入る整数は $96 - 48 =$ $\boxed{4}\boxed{8}$ 個ある。

解答番号	正　解	配　点	備　考
43	9	4	
44	6		
45	6	4	
46	0		
47	1	4	
48	2		

解答番号	正　解	配　点	備　考
49	3	4	
50	6		
51	6	5	
52	3		
53	4	4	
54	8		

第６問　（学科別問題）　（Ｊ科専願志願者選択）　配点：25 点

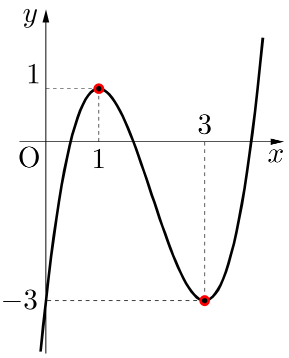
関数

$$y = x^3 - 6x^2 + 9x - 3 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{①}$$

によって表される曲線を C とする。$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$ とおくと，

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3)$ より，① の増減および曲線 C の概形は次のようになる。

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$



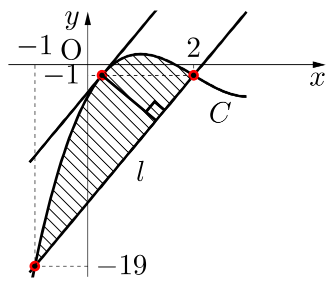
よって，$x = \boxed{1}$ のとき，極大値 $\boxed{1}$ をとり，$x = \boxed{3}$ のとき，極小値 $-\boxed{3}$ をとる。

点 $(0,\ 5)$ から，曲線 C への接線の方程式は，接点を $(a,\ f(a))$ とおくと，$y - f(a) = f'(a)(x-a)$ となる。これが点 $(0,\ 5)$ を通るから，$5 - f(a) = -af'(a)$ すなわち，$a^3 - 3a^2 + 4 = 0$ を満たす。この解は $a = -1$，2 となるから，接点は $\left(-\boxed{1},\ -\boxed{1}\boxed{9}\right)$，$\left(\boxed{2},\ -\boxed{1}\right)$ である。

2 点 $(-1,\ -19)$，$(2,\ -1)$ を通る直線を l とすると，直線 l の方程式は，$y = 6x - 13$ となる。

$-1 \leqq x \leqq 2$ において，直線 l と曲線 C で囲まれた図形の面積は，

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{2} \{f(x) - (6x-13)\}\,dx &= \int_{-1}^{2} \left(x^3 - 6x^2 + 3x + 10\right) dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 10x\right]_{-1}^{2} \\ &= \frac{\boxed{8}\boxed{1}}{\boxed{4}}\end{aligned}$$



である。また，$-1 \leqq x \leqq 2$ において，直線 l との距離が最大となる曲線 C 上の点は，直線 l に平行な接線上にあるから，$f'(x) = 6$ すなわち，$x^2 - 4x + 1 = 0$ を満たす。この解のうち，$-1 \leqq x \leqq 2$ を満たすものは，$x = 2 - \sqrt{3}$ であるから，求める点は $\left(\boxed{2} - \sqrt{\boxed{3}},\ -\boxed{1}\right)$ である。

解答番号	正　解	配　点	備　考
55	1	3	
56	1		
57	3	3	
58	3		
59	1	4	
60	1		
61	9		

解答番号	正　解	配　点	備　考
62	2	4	
63	1		
64	8	6	
65	1		
66	4		
67	2	5	
68	3		
69	1		