一般選抜問題　前期（A日程）

数　学

（配点と解答例）

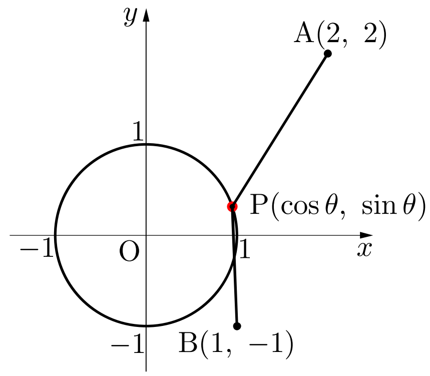
第１問　（必答問題）　　配点：25 点

平面上に２点 A$(2,\ 2)$，B$(1,\ -1)$ があり，点 P が円 $x^2+y^2=1$ 上を動くとき，$\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2$ の最小値とそのときの点 P の座標を求めよ。

［解答］　点 P の座標を $(\cos\theta,\ \sin\theta)$，$(0 \leqq \theta < 2\pi)$ とすると，

$$\begin{aligned}\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2 &= (\cos\theta-2)^2+(\sin\theta-2)^2+(\cos\theta-1)^2+(\sin\theta+1)^2\\ &= \cos^2\theta-4\cos\theta+4+\sin^2\theta-4\sin\theta+4+\cos^2\theta-2\cos\theta+1+\sin^2\theta+2\sin\theta+1\\ &= 2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)+10-2\sin\theta-6\cos\theta=12-2(\sin\theta+3\cos\theta)\end{aligned}$$

となる。ここで，三角関数の合成から，$\sin\theta+3\cos\theta=\sqrt{10}\sin(\theta+\alpha)$ と変形できる。



ただし，α は，$\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{10}}$，$\sin\alpha=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$ を満たす角となり，$-1 \leqq \sin(\theta+\alpha) \leqq 1$ であるから，

$$\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2=12-2\sqrt{10}\sin(\theta+\alpha) \geqq 12-2\sqrt{10}$$

となる。

したがって，$\theta+\alpha=\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2$ の最小値は $12-2\sqrt{10}$ となり，このとき，

$\cos\theta=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$，$\sin\theta=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{10}}$ より，

点 P の座標は，$\left(\dfrac{3}{\sqrt{10}},\ \dfrac{1}{\sqrt{10}}\right)$ $\cdots$（答え）

第２問　（必答問題）　配点：25 点

[1]　$k > 0$ とし，2 直線 $y = \dfrac{1}{2k}x$，$y = -6kx$ のなす鋭角を θ とする。θ の最小値とそのときの定数 k の値を求める。

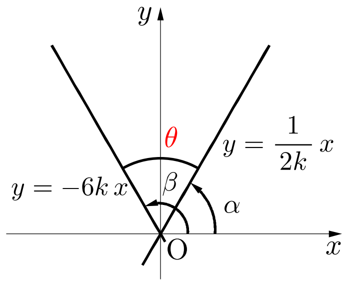
2 直線 $y = \dfrac{1}{2k}x$，$y = -6kx$ と x 軸の正の向きとの成す角を，それぞれ α，β とすると

$\tan\alpha = \dfrac{1}{2k}$，$\tan\beta = -6k$ より，

$$\tan(\beta-\alpha) = \frac{\tan\beta - \tan\alpha}{1+\tan\beta\,\tan\alpha} = \frac{-6k - \dfrac{1}{2k}}{1-3} = \boxed{3}\,k + \frac{\boxed{1}}{\boxed{4}\,k}$$

となり，$\tan(\beta-\alpha) > 0$ であるから，2 直線の成す鋭角 θ は，$\theta = \beta - \alpha$ となる。

ここで，$3k > 0$ と $\dfrac{1}{4k} > 0$ に対して，相加平均と相乗平均の関係より，



$$\tan\theta = 3k + \frac{1}{4k} \geqq 2\sqrt{3k\cdot\frac{1}{4k}} = \sqrt{\boxed{3}}$$

となる。等号が成り立つのは，$3k = \dfrac{1}{4k}$ すなわち，

$k^2 = \dfrac{1}{12}$ のときである。

よって，$k > 0$ より，$k = \dfrac{\boxed{1}}{\boxed{2}\sqrt{\boxed{3}}}$ のとき，$\tan\theta = \sqrt{3}$ となるから，θ の最小値は $\dfrac{\pi}{\boxed{3}}$ となる。

[2]　不等式 $8(\log_{\frac{1}{16}} x)^2 - 10\log_{\frac{1}{16}} x + 3 < 0$ を解くと，$\left(2\log_{\frac{1}{16}} x - 1\right)\left(4\log_{\frac{1}{16}} x - 3\right) < 0$ より，

$\dfrac{\boxed{1}}{\boxed{2}} < \log_{\frac{1}{16}} x < \dfrac{\boxed{3}}{\boxed{4}}$ から，$\log_{\frac{1}{16}}\left(\dfrac{1}{16}\right)^{\frac{1}{2}} < \log_{\frac{1}{16}} x < \log_{\frac{1}{16}}\left(\dfrac{1}{16}\right)^{\frac{3}{4}}$ となる。

ここで，対数の底 $\dfrac{1}{16}$ は 1 より小さいから，真数を比較すると，$\left(\dfrac{1}{16}\right)^{\frac{3}{4}} < x < \left(\dfrac{1}{16}\right)^{\frac{1}{2}}$

すなわち，不等式の解は，$\dfrac{\boxed{1}}{\boxed{8}} < x < \dfrac{\boxed{1}}{\boxed{4}}$ となる。

解答番号	正　解	配　点	備　考
1	3	4	
2	1		
3	4		
4	3	4	
5	1	4	
6	2		
7	3		
8	3	4	

解答番号	正　解	配　点	備　考
9	1	4	
10	2		
11	3		
12	4		
13	1	5	
14	8		
15	1		
16	4		

第３問　（学科別問題）　（K／R科志願者選択）　配点：25 点

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n について，$S_n = 2a_n - n^2$ が成り立っているとき，
数列 $\{a_n\}$ の一般項を求める。

数列 $\{a_n\}$ の初項は，$a_1 = S_1 = 2a_1 - 1^2$ より，$a_1 = \boxed{1}$ となる。

また，$n \geqq 2$ に対して，$a_n = S_n - S_{n-1} = \left(2a_n - n^2\right) - \left\{2a_{n-1} - (n-1)^2\right\}$ より，漸化式

$$a_n = \boxed{2}\, a_{n-1} + \boxed{2}\, n - \boxed{1} \quad (n \geqq 2) \qquad \cdots\cdots ①$$

が得られる。数列 $\{a_n\}$ に対して，$b_n = a_{n+1} - a_n \ (n \geqq 1)$ によって，階差数列 $\{b_n\}$ を定めると，階差数列 $\{b_n\}$ の初項は，$a_1 = 1$ と漸化式①から，$b_1 = a_2 - a_1 = 2a_1 + 2 \cdot 2 - 1 - 1 = \boxed{4}$ となる。

$n \geqq 2$ に対しては，漸化式①を用いると，

$b_n = a_{n+1} - a_n = \{2a_n + 2(n+1) - 1\} - (2a_{n-1} + 2n - 1) = 2\left(a_n - a_{n-1}\right) + 2 = 2b_{n-1} + 2$ より，

$$b_n = \boxed{2}\, b_{n-1} + \boxed{2} \quad (n \geqq 2) \qquad \cdots\cdots ②$$

となる。漸化式②は，$\alpha = 2\alpha + 2$ を満たす $\alpha = -2$ を用いて，②の両辺から -2 を差し引くと，

$$b_n + \boxed{2} = \boxed{2}\, (b_{n-1} + 2) \quad (n \geqq 2) \qquad \cdots\cdots ③$$

と変形できるから，数列 $\{b_n + 2\}$ は，初項 $b_1 + 2 = 4 + 2 = \boxed{6}$，公比 2 の等比数列となる。

これより，階差数列 $\{b_n\}$ の一般項 $b_n = 6 \cdot 2^{n-1} - 2$ が求まる。

よって，$n \geqq 2$ のとき，

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(6 \cdot 2^{k-1} - 2\right) = 1 + \frac{6\left(2^{n-1} - 1\right)}{2 - 1} - 2(n-1) = 3 \cdot 2^n - 2n - 3 \text{ より，}$$

$$a_n = \boxed{3} \cdot 2^n - \boxed{2}\, n - \boxed{3} \quad (n \geqq 2) \qquad \cdots\cdots ④$$

となる。この式に $n = 1$ を代入すると，$a_1 = 3 \cdot 2^1 - 2 \cdot 1 - 3 = 1$ が得られるから，④は $n = 1$ のときも成り立つ。

したがって，数列 $\{a_n\}$ の一般項は，$a_n = 3 \cdot 2^n - 2n - 3$ となる。

解答番号	正　解	配　点	備　考
17	1	3	
18	2	4	
19	2		
20	1		
21	4	3	
22	2	4	
23	2		

解答番号	正　解	配　点	備　考
24	2	3	
25	2		
26	6	3	
27	3	5	
28	2		
29	3		

第４問　（学科別問題）　（Ｋ／Ｒ科志願者選択）　配点：25 点

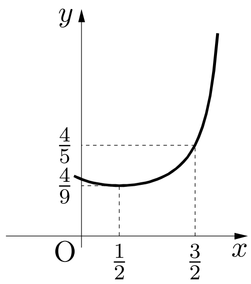
関数 $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)(2-x)} \quad \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{3}{2}\right)$ について考える。

関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は,

$$f'(x) = -\frac{\{(x+1)(2-x)\}'}{\{(x+1)(2-x)\}^2} = -\frac{2-x-(x+1)}{\{(x+1)(2-x)\}^2} = \frac{\boxed{2}\,x - \boxed{1}}{(x+1)^2(2-x)^2}$$ となる。

関数 $f(x)$ の増減およびグラフの概形は，下の通りとなる。

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{3}{2}$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	$\frac{4}{9}$	$\nearrow$	$\frac{4}{5}$



したがって，関数 $f(x)$ は，$x = \dfrac{\boxed{3}}{\boxed{2}}$ のとき，最大値 $\dfrac{\boxed{4}}{\boxed{5}}$ をとり，

$x = \dfrac{\boxed{1}}{\boxed{2}}$ のとき，最小値 $\dfrac{\boxed{4}}{\boxed{9}}$ をとる。

定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{3}{2}} f(x)\,dx$ の値を求める。

関数 $f(x)$ は，$f(x) = \dfrac{1}{(x+1)(2-x)} = \dfrac{1}{\boxed{3}}\left(\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{2-x}\right)$ と変形されるから，

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{3}{2}} f(x)\,dx &= \frac{1}{3}\int_0^{\frac{3}{2}} \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2-x}\right) dx = \frac{1}{3}\Big[\log_e|x+1| - \log_e|2-x|\Big]_0^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{1}{3}\left[\log_e\left|\frac{x+1}{2-x}\right|\right]_0^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}\left(\log_e\boxed{2} + \log_e\boxed{5}\right)\end{aligned}$$

となる。

解答番号	正　解	配　点	備　考
30	2	5	
31	1		
32	3	3	
33	2		
34	4	3	
35	5		

解答番号	正　解	配　点	備　考
36	1	3	
37	2		
38	4	3	
39	9		
40	3	2	
41	2	6	順不同
42	5		

第５問　（学科別問題）　（Ｊ科志願者選択）　配点：25 点

赤，白のカードが 5 枚ずつあり，それぞれ 1 から 5 までの番号が書いてある。
この 10 枚のカードから同時に 3 枚引くとき，次の確率を考える。

(1)　3 枚とも赤のカードである確率は $\dfrac{{}_5C_3}{{}_{12}C_3} = \dfrac{\boxed{1}}{\boxed{1}\boxed{2}}$ である。

(2)　少なくとも 1 枚は 1 のカードである事象は，3 枚とも 1 以外のカードである事象の余事象である。

したがって，3 枚とも 1 以外のカードである確率は $\dfrac{{}_8C_3}{{}_{10}C_3} = \dfrac{7}{15}$ であるから，

少なくとも 1 枚は 1 のカードである確率は $1 - \dfrac{7}{15} = \dfrac{\boxed{8}}{\boxed{1}\boxed{5}}$ である。

(3)　和が偶数となる確率を求める。

和が偶数となる場合は，3 枚とも偶数のカードのときと，2 枚が奇数のカードで残りの 1 枚が偶数のカードのときで，これらは互いに排反である。

したがって，和が偶数となる確率は $\dfrac{{}_4C_3}{{}_{10}C_3} + \dfrac{{}_6C_2 \cdot {}_4C_1}{{}_{10}C_3} = \dfrac{\boxed{8}}{\boxed{1}\boxed{5}}$ である。

(4)　3 枚とも赤のカードか，または和が偶数となる確率を求める。

3 枚とも赤のカードで和が偶数となる確率は $\dfrac{{}_3C_2 \cdot {}_2C_1}{{}_{10}C_3} = \dfrac{\boxed{1}}{\boxed{2}\boxed{0}}$ となるから，

これと前問 (1)，(3) より，3 枚とも赤のカードか，または和が偶数となる確率は

$\dfrac{1}{12} + \dfrac{8}{15} - \dfrac{1}{20} = \dfrac{\boxed{1}\boxed{7}}{\boxed{3}\boxed{0}}$ である。

解答番号	正　解	配　点	備　考
43	1	4	
44	1		
45	2		
46	8	5	
47	1		
48	5		
49	8	5	
50	1		
51	5		

解答番号	正　解	配　点	備　考
52	1	5	
53	2		
54	0		
55	1	6	
56	7		
57	3		
58	0		

第 6 問　（学科別問題）　（J 科志願者選択）　配点：25 点

関数 $f(x)$ は次の等式

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + \int_{-1}^{1} f(t)\,dt \qquad \cdots\cdots ①$$

を満たしている。

まず，① を満たす関数 $f(x)$ を求める。$\int_{-1}^{1} f(t)\,dt$ は定数であるから，k を定数として，

$\int_{-1}^{1} f(t)\,dt = k$ とおくと，① は $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + k$ となる。このとき，

$$\begin{aligned} k &= \int_{-1}^{1} f(t)\,dt = \int_{-1}^{1} \left(t^3 + 3t^2 - 9t + k\right)\,dt \\ &= \left[\frac{1}{\boxed{4}}t^4 + t^3 - \frac{\boxed{9}}{\boxed{2}}t^2 + kt\right]_{-1}^{1} = \boxed{2} + \boxed{2}k \end{aligned}$$

より，$k = -\boxed{2}$ となる。したがって，① を満たす関数 $f(x)$ は

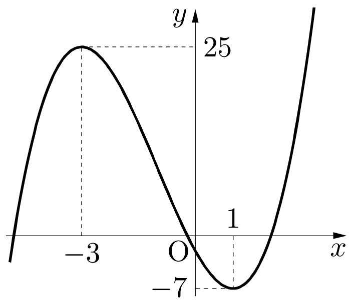
$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 2 \qquad \cdots\cdots ②$$

となる。

次に，関数 $f(x)$ の極値を求める。

導関数は，$f'(x) = \boxed{3}x^2 + \boxed{6}x - \boxed{9} = 3(x+3)(x-1)$ であるから，これと ② より，関数 $f(x)$ の増減およびグラフの概形は，下の通りとなる。

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	25	$\searrow$	-7	$\nearrow$



したがって，$x = -\boxed{3}$ のとき，極大値 $\boxed{2}\boxed{5}$ をとり，$x = \boxed{1}$ のとき，極小値 $-\boxed{7}$ をとる。

解答番号	正　解	配　点	備　考
59	4	3	
60	9		
61	2		
62	2	4	
63	2		
64	2	3	

解答番号	正　解	配　点	備　考
65	3	3	
66	6		
67	9		
68	3	3	
69	2	3	
70	5		
71	1	3	
72	7	3	