2025 年度一般選抜問題　前期（A 日程）

数　学

（配点と解答例）

第１問　（必答問題）　　配点：30 点

点Ｐが放物線 $y=x^2$ 上を動くとき，２点 A$(-1,\ -1)$，B$(2,\ -5)$ と点Ｐを頂点とする △ABP の面積の最小値とそのときの点Ｐの座標を求めよ。

［解答］　２点Ａ，Ｂを通る直線を l として，直線 l の方程式は，$y-(-1)=\dfrac{-1-(-5)}{-1-2}\{x-(-1)\}$ すなわち，$4x+3y+7=0$ となる。ここで，点Ｐの座標を $(t,\ t^2)$，点Ｐと直線 l の距離を d とすると，$d=\dfrac{|4t+3t^2+7|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\dfrac{1}{5}|3t^2+4t+7|$ となる。

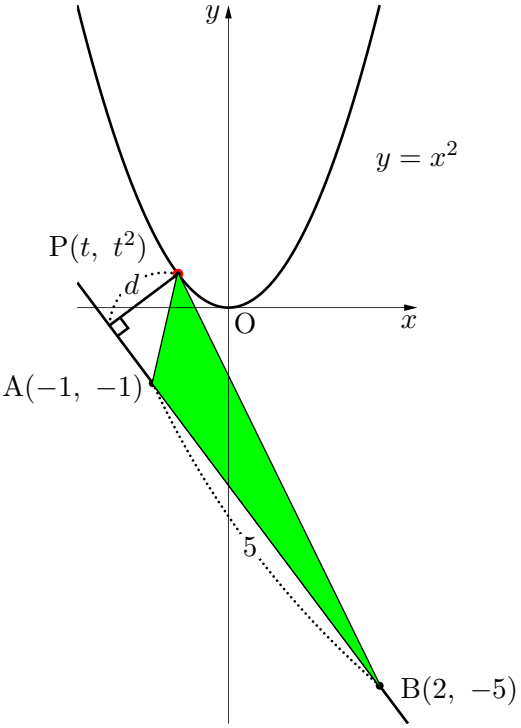
また，$\mathrm{AB}=\sqrt{(-1-2)^2+\{-1-(-5)\}^2}=5$ より，

$\triangle\mathrm{ABP}=\dfrac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot d=\dfrac{1}{2}|3t^2+4t+7|$ と表される。

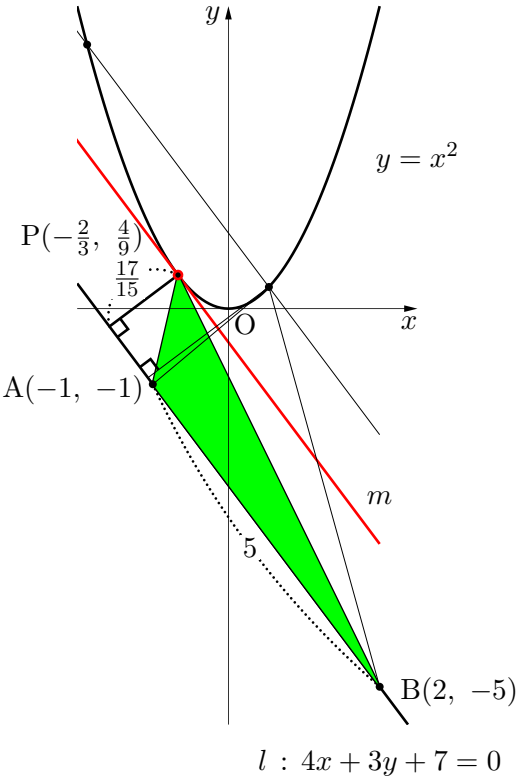
したがって，

$$\begin{aligned}3t^2+4t+7 &= 3\left(t^2+\frac{4}{3}t\right)+7\\ &= 3\left\{\left(t+\frac{2}{3}\right)^2-\left(\frac{2}{3}\right)^2\right\}+7\\ &= 3\left(t+\frac{2}{3}\right)^2+\frac{17}{3}\end{aligned}$$

より，△ABP は，$t=-\dfrac{2}{3}$ のとき，最小値 $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{17}{3}=\dfrac{17}{6}$ をとり，そのときの点Ｐの座標は，$\mathrm{P}\left(-\dfrac{2}{3},\ \dfrac{4}{9}\right)\cdots$（答え）



［別解］　２点Ａ，Ｂを通る直線を l として，直線 l の方程式は $4x+3y+7=0$ となる。ここで，点Ｐを通り，直線 l に平行な直線を m とする。△ABP において，底辺を AB として，高さが最小となるときは，直線 m が放物線と接するときで，このときの面積も最小となる。したがって，放物線 $y=x^2$ 上の点Ｐにおける接線の傾きが直線 l の傾きと等しくなるように x の値を定めると，$y'=2x=-\dfrac{4}{3}$ より，$x=-\dfrac{2}{3}$ となる。よって，このときの点Ｐの座標は，$\mathrm{P}\left(-\dfrac{2}{3},\ \dfrac{4}{9}\right)$ で，底辺 AB$=5$，高さ $\dfrac{\left|4\cdot\left(-\dfrac{2}{3}\right)+3\cdot\left(\dfrac{4}{9}\right)+7\right|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\dfrac{17}{15}$ より，△ABP の面積は，$\triangle\mathrm{ABP}=\dfrac{1}{2}\cdot 5\cdot\dfrac{17}{15}=\dfrac{17}{6}\cdots$（答え）



第２問　（必答問題）　　配点：35 点

［1］ 三角形の３つの内角の比が $3:4:5$ のとき，３つの内角は小さい順に $180^\circ \times \frac{3}{12}$，$180^\circ \times \frac{4}{12}$，$180^\circ \times \frac{5}{12}$ すなわち，$\boxed{4}\boxed{5}^\circ$，$\boxed{6}\boxed{0}^\circ$，$\boxed{7}\boxed{5}^\circ$ となる。

さらに，三角形の３つの辺のうち，２番目に小さい辺の長さが１のとき，残りの２辺を小さい順に a，b とおくと，正弦定理より，$\frac{a}{\sin 45^\circ} = \frac{1}{\sin 60^\circ} = \frac{b}{\sin 75^\circ}$ となるから，$a = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{\boxed{6}}}{\boxed{3}}$

となる。また，加法定理より，$\sin 75^\circ = \sin(30^\circ + 45^\circ) = \sin 30^\circ \cos 45^\circ + \cos 30^\circ \sin 45^\circ$ となるから，

$b = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin 75^\circ = \frac{\sqrt{\boxed{6}} + \boxed{3}\sqrt{\boxed{2}}}{\boxed{6}}$ となる。

［2］ $\log_4 25$ の小数部分を a とすると，$4^2 < 25 < 4^3$ より，$2 < \log_4 25 < 3$ となるから，$\log_4 25$ の整数部分は２となる。したがって，$a = \log_4 25 - 2 = \frac{\log_2 25}{\log_2 4} - 2 = \log_2 \boxed{5} - \boxed{2}$ となる。

このとき，$2^a = 2^{\log_2 5 - 2} = 2^{\log_2 5} \cdot 2^{-2} = \frac{5}{4}$ より，$2^a + 2^{-a} = \frac{5}{4} + \frac{4}{5} = \frac{\boxed{4}\boxed{1}}{\boxed{2}\boxed{0}}$ となる。

また，$5^3 < 2^7$，$2^{23} < 5^{10}$ より，$\log_2 5^3 < \log_2 2^7$，$\log_2 2^{23} < \log_2 5^{10}$ すなわち，

$\frac{\boxed{2}\boxed{3}}{\boxed{1}\boxed{0}} < \log_2 5 < \frac{\boxed{7}}{\boxed{3}}$ となる。したがって，$2.3 < \log_2 5 < 2.33\cdots\cdots$ より，

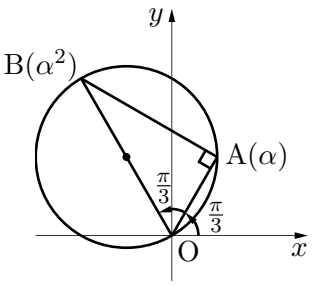
$0.3 < a < 0.33\cdots\cdots$ から，a の小数第１位は $\boxed{3}$ となる。

解答番号	正　解	配　点	備　考
1	4	2	
2	5		
3	6	2	
4	0		
5	7	2	
6	5		
7	6	4	
8	3		
9	6	5	
10	3		
11	2		
12	6		

解答番号	正　解	配　点	備　考
13	5	6	
14	2		
15	4	6	
16	1		
17	2		
18	0		
19	2	3	
20	3		
21	1		
22	0		
23	7	3	
24	3		
25	3	2	

第３問　（学科別問題）　（Ｋ科志願者選択）　配点：35 点

［1］ i を虚数単位とし，複素数 $\alpha = 1 + \sqrt{3}\,i$ に対して，複素平面上に原点 O と 2 点 $\mathrm{A}(\alpha)$，$\mathrm{B}(\alpha^2)$ をとる。このとき，

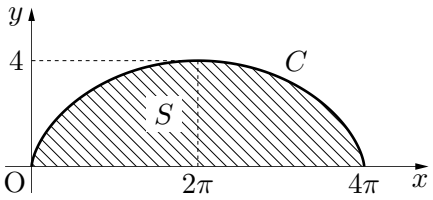


$|\alpha| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$ より，OA= [2] となる。また，$\alpha = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$ より，点 α^2 は，点 α を原点を中心として $\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転し，原点からの距離を 2 倍した点であるから，

OB= [4]，$\angle\mathrm{AOB} = \dfrac{\pi}{\boxed{3}}$ となる。これと OA ： OB = 1 : 2 より，$\angle\mathrm{BAO} = \dfrac{\pi}{\boxed{2}}$ となるから，円周角の定理より，線分 OB は △OAB の外接円の直径となり，線分 OB の中点が △OAB の外心となる。したがって，△OAB の外心を表す複素数は，

$\dfrac{1}{2}\alpha^2 = \dfrac{1}{2}\cdot 4\left(\cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right) = -\boxed{1} + \sqrt{\boxed{3}}\,i$ となる。

［2］ サイクロイド $x = 2(\theta - \sin\theta)$，$y = 2(1 - \cos\theta)$ $(0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ のグラフを C とし，曲線 C と x 軸で囲まれた部分の面積を S，曲線 C と x 軸で囲まれた部分が x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積を V とする。$\dfrac{dx}{d\theta} = y$ と $y = \boxed{4}\sin^2\dfrac{\theta}{\boxed{2}}$ に注意すると，



面積 S と体積 V はそれぞれ $S = \displaystyle\int_0^{2\pi} y\,\frac{dx}{d\theta}\,d\theta = \int_0^{2\pi} y^2\,d\theta = \boxed{1}\boxed{6}\int_0^{2\pi}\sin^4\frac{\theta}{2}\,d\theta$，

$V = \pi\displaystyle\int_0^{2\pi} y^2\,\frac{dx}{d\theta}\,d\theta = \pi\int_0^{2\pi} y^3\,d\theta = \boxed{6}\boxed{4}\pi\int_0^{2\pi}\sin^6\frac{\theta}{2}\,d\theta$ と表される。ここで，n を 0 以上の整数として，定積分 $I_n = \displaystyle\int_0^{2\pi}\sin^{2n}\frac{\theta}{2}\,d\theta$ の漸化式は，$I_{n+1} = \displaystyle\int_0^{2\pi}\sin^{2n+1}\frac{\theta}{2}\cdot\left(-2\cos\frac{\theta}{2}\right)'\,d\theta$ として，部分積分法を用いると，

$$
\begin{aligned}
I_{n+1} &= \left[\sin^{2n+1}\frac{\theta}{2}\cdot\left(-2\cos\frac{\theta}{2}\right)\right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi}\left(\sin^{2n+1}\frac{\theta}{2}\right)'\cdot\left(-2\cos\frac{\theta}{2}\right)\,d\theta \\
&= -\int_0^{2\pi}(2n+1)\sin^{2n}\frac{\theta}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right)\cdot\left(-2\cos\frac{\theta}{2}\right)\,d\theta \\
&= (2n+1)\int_0^{2\pi}\sin^{2n}\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}\,d\theta = (2n+1)\int_0^{2\pi}\sin^{2n}\frac{\theta}{2}\left(1-\sin^2\frac{\theta}{2}\right)\,d\theta \\
&= \left(\boxed{2}n + \boxed{1}\right)(I_n - I_{n+1})
\end{aligned}
$$

すなわち，$I_{n+1} = \dfrac{2n+1}{\boxed{2}n + \boxed{2}}\,I_n$ となる。これと $I_0 = 2\pi$ より，$I_1 = \dfrac{1}{2}\,I_0 = \dfrac{1}{2}\cdot 2\pi = \pi$，

$I_2 = \dfrac{3}{4}\,I_1 = \dfrac{3}{4}\pi$，$I_3 = \dfrac{5}{6}\,I_2 = \dfrac{5}{6}\cdot\dfrac{3}{4}\pi = \dfrac{5}{8}\,\pi$ から，$S = 16\,I_2 = \boxed{1}\boxed{2}\,\pi$，

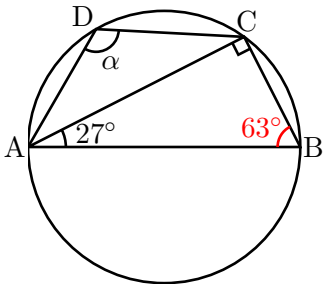
$V = 64\pi\,I_3 = \boxed{4}\boxed{0}\,\pi^2$ となる。

解答番号	正　解	配　点	備　考
26	2	2	
27	4	2	
28	3	3	
29	2	3	
30	1	5	
31	3		
32	4	2	
33	2		
34	1	2	
35	6		

解答番号	正　解	配　点	備　考
36	6	2	
37	4		
38	2	4	
39	1		
40	2	2	
41	2		
42	1	4	
43	2		
44	4	4	
45	0		

第４問　（学科別問題）　（Ｒ／Ｊ科志願者選択）　配点：35 点

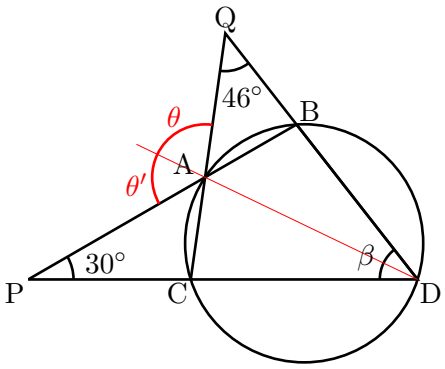
［1］ 右の図において，角 α を求めよ。
ただし，線分 AB は円の直径である。



［解答］ 円周角の定理より，弧 AB に対する円周角 $\angle ACB$ は $90°$ となり，これより，$\angle CBA = 63°$ となる。また，円に内接する四角形の対角の和は $180°$ となるから，$\angle CBA + \alpha = 180°$ すなわち，

$\alpha =$ 1 1 7 $°$ となる。

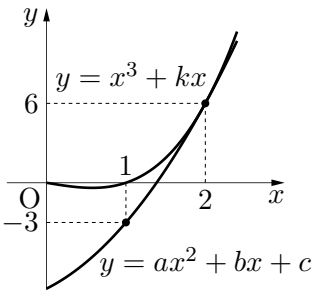
［2］ 右の図において，角 β を求めよ。



［解答］ $\triangle DAQ$ の外角の 1 つを θ，$\triangle PAD$ の外角の 1 つを θ' とすると，$\angle QAP$ はこれらの和と等しいから，$\angle QAP = \theta + \theta' = 46° + 30° + \beta$ となる。また，このとき，$\angle QAP = \angle CAB$ で，円に内接する四角形の対角の和は $180°$ となるから，$\angle CAB + \beta = 180°$ すなわち，$76° + 2\beta = 180°$ より

$\beta =$ 5 2 $°$ となる。

［3］ 放物線 $y = ax^2 + bx + c$ は，点 $(1,\ -3)$ を通り，かつ点 $(2,\ 6)$ で曲線 $y = x^3 + kx$ と接する。このとき，定数 a，b，c および k の値をそれぞれ求める。



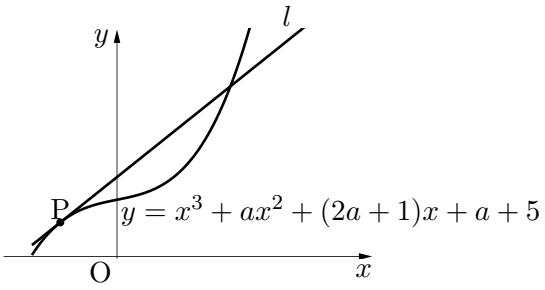
$f(x) = ax^2 + bx + c$，$g(x) = x^3 + kx$ として，これらを微分すると，$f'(x) = 2ax + b$，$g'(x) = 3x^2 + k$ となる。
したがって，$f(1) = -3$，$f(2) = g(2) = 6$，$f'(2) = g'(2)$ より，a，b，c，k に関する連立 1 次方程式

$$\begin{cases} a + b + c = -3 & \cdots\cdots ① \\ 4a + 2b + c = 6 & \cdots\cdots ② \\ 8 + 2k = 6 & \cdots\cdots ③ \\ 4a + b = 12 + k & \cdots\cdots ④ \end{cases}$$

が得られる。

③ より，$k = -$ 1 となる。これを ④ に代入すると，$4a + b = 11$ …… ⑤ となる。
一方，② − ① として，c を消去すると，$3a + b = 9$ …… ⑥ となる。よって，⑤ − ⑥ より，$a =$ 2 となる。これを ⑥ に代入すると，$b =$ 3，さらに，$a = 2$，$b = 3$ を ① に代入すると，$c = -$ 8 となる。

［4］ 曲線 $y = x^3 + ax^2 + (2a+1)x + a + 5$ は，定数 a の値に関係なく，点Pにおいて定直線 l に接する。
このときの点Pの座標と定直線 l の方程式を求める。
$f(x) = x^3 + ax^2 + (2a+1)x + a + 5$ として，a について整理すると，$f(x) = (x^2 + 2x + 1)a + x^3 + x + 5$ となる。
これを微分すると，$f'(x) = (2x+2)a + 3x^2 + 1$ となる。



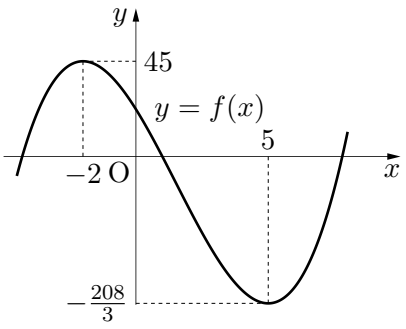
ここで，$f(x)$ と $f'(x)$ の値が，a の値に関係しない場合は，a の係数が 0 となるときであるから，そのような x の値は $x = -1$ である。このとき，$f(-1) = -1 - 1 + 5 = 3$，$f'(-1) = 3 + 1 = 4$ となるから，
点Pの座標は，$\left(-\boxed{1}, \boxed{3}\right)$，定直線 l の方程式は，$y - f(-1) = f'(-1)(x+1)$ すなわち，
$y = \boxed{4}x + \boxed{7}$ となる。

［5］ 関数 $f(x) = \displaystyle\int_1^x (2t^2 - 6t - 20)\,dt$ の極値を求める。

$$\begin{aligned} f(x) &= \left[\frac{2}{3}t^3 - 3t^2 - 20t\right]_1^x \\ &= \frac{2}{3}(x^3 - 1) - 3(x^2 - 1) - 20(x - 1) \\ &= \frac{1}{3}(x-1)(2x^2 - 7x - 67) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x^2 - 6x - 20 \\ &= 2(x^2 - 3x - 10) = 2(x+2)(x-5) \end{aligned}$$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	5	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	45	↘	$-\frac{208}{3}$	↗



より，関数 $f(x)$ の増減およびグラフの概形は右の通りとなる。よって，$x = -\boxed{2}$ のとき，極大値 $\boxed{4}\boxed{5}$ をとり，$x = \boxed{5}$ のとき，
極小値 $-\dfrac{\boxed{2}\boxed{0}\boxed{8}}{\boxed{3}}$ をとる。

解答番号	正　解	配　点	備　考
46	1	5	
47	1		
48	7		
49	5	5	
50	2		
51	2	2	
52	3	2	
53	8	2	
54	1	2	
55	1	3	
56	3		

解答番号	正　解	配　点	備　考
57	4	4	
58	7		
59	2	2	
60	4	3	
61	5		
62	5	2	
63	2	3	
64	0		
65	8		
66	3		