

愛知工科大学紀要

工学部・愛知工科大学自動車短期大学

第 23 卷

2025

Bulletin of Aichi University of Technology

AUT

愛知工科大学紀要 第23巻

目 次

研究論文

市販の小型計測器を用いた愛知工科大学屋上での PM _{2.5} と CO ₂ の観測 藪下 彰啓, 藤本 哲哉	1
多点同時測定が可能な触覚センサの開発 Li GuoXiu, 裴 艶玲, 大日方 五郎	5
簡易脳波計を用いたヨガによるリラックス度向上の検証 磯貝 正弘, 山田 慶	11
姿勢推定を用いた管楽器奏者の演奏前動作検出 渡邊 風太, 實廣 貴敏	21
ヘッドフォン型 3D 聴覚ディスプレイの製作と性能評価 深谷 拓也, 山高 正烈	28
研究ノート	
深層学習にもとづいた自動画像クロッピングシステムの構築 近藤 敏彰	34
簡易的な挨拶および握手動作するロボット ... 高木 温朗, 村口 黎於奈, 白 名軒, 周 承龍, 孫 浩煬, 張 超飛, 裴 艶玲	39
線形代数における行列の階数の意味 高橋 義則	44
解説・総説	
可積分系における数理物理入門 I	

.....	米田 守重	49
双曲線関数と置換積分	
.....	大迫 尚行	53
加速度運動をする荷電粒子の電磁ポテンシャルと電磁場の各種表式	
.....	石川 雄二郎, 石川 知之	61
報告		
日本語能力試験対策講座の実施報告	
.....	寺井 雅人, 小林 直美, 加藤 亨, 裴 艶玲	67
業績リスト(2025.1~2025.12)		

研究論文

市販の小型計測器を用いた愛知工科大学屋上での PM_{2.5} と CO₂ の観測

藪下 彰啓*, 藤本 哲哉*

(2025年9月8日受理)

Measurement of PM_{2.5} and CO₂ on the roof of Aichi University of Technology using commercially available compact sensors

Akihiro YABUSHITA* and Tetsuya FUJIMOTO*

(Received September 8, 2025)

Abstract

Commercially available compact PM_{2.5} and CO₂ measurement devices were installed on the rooftop of Aichi University of Technology. Observations were conducted from January 1 to August 29, 2025. PM_{2.5} concentrations were confirmed to show similar trends when compared to data from the Ministry of the Environment's monitoring station in Miyuki-cho, Gamagori. Furthermore, regarding the high PM_{2.5} concentrations observed on January 19, analysis using data from AEROS, FIRMS, and AMeDAS enabled the estimation of the source.

キーワード: 大気観測、浮遊粒子状物質、野焼き

Keywords : atmospheric observation, suspended particulate matter, burning fields

1. はじめに

粒子状物質 (particulate matter, PM) のうち、粒径が 10 マイクロメートル以下のものは、特に浮遊粒子状物質 (suspended particulate matter, SPM) と呼ばれている。SPM は微小であるため、大気中に長時間とどまりやすく、人の肺や気管に付着して健康に悪影響を及ぼす可能性がある。この SPM には、工場から排出される煤塵や、大型ディーゼル車両から放出されるディーゼル排気微粒子 (diesel exhaust particle, DEP)、土壌の巻き上げ、海洋や火山などによって、直接大気中に放出される一次粒子が含まれる[1]。さらに、硫酸化合物 (SO_x) や窒素化合物 (NO_x) などのガス成分が大気中で化学反応を起こし、蒸気圧の低い物質となって粒子化する二次粒子も含まれる[1]。

これらよりさらに粒径が小さい PM_{2.5} (微小粒子状物質) は、特に注目されている。PM_{2.5} とは、粒径が 2.5 マイクロメートル以下の粒子であり、非常に小さいため肺の奥まで入り込みやすく、呼吸器系や循環器系への影響が懸念されている[2]。PM_{2.5} は中国など大気汚染が深刻な地域から越境して日本に飛来し、国内の大気にも影響を与えているとされている[2]。

PM_{2.5} の環境基準は、1年平均値が 15 $\mu\text{g}/\text{m}^3$ 以下、1日平均値が 35 $\mu\text{g}/\text{m}^3$ 以下と定められており(平成 21

年 9 月 9 日告示)、大気汚染防止法に基づき、令和 5 年度には全国 1,100 の一般環境大気測定局と 233 の自動車排出ガス測定局で常時監視が行われている[3]。

一方、地球表面では炭素が大気・陸地・海洋を循環している。地球全体で見ると、1年間に発生する二酸化炭素 (CO₂) の量は、化石燃料の使用によって約 58 億 t-C、森林破壊によって約 15 億 t-C、合計で約 73 億 t-C と推定されており、これは大気中の CO₂ 総量 (約 7300 億 t-C) の約 1% に相当すると推定されている[2]。発生した CO₂ は植物や土壌に吸収されるほか、海水にも溶け込み、合計で約 38 億 t-C が消失するが、残りの約 35 億 t-C は大気中に蓄積され、年々その量が増加している[2]。気象庁が観測を行っている綾里、南鳥島、与那国島 (与那国島は 2024 年 3 月末で観測終了) では、大気中の CO₂ 濃度の経年変化がウェブページで公開されており、いずれの地点でも季節変動を繰り返しながら濃度は増加し続けている[4]。

PM_{2.5} や CO₂ 濃度には地域ごとの特徴がある場合もあると考えられるため、地域の大気環境を把握するための観測は重要である。しかしながら、本格的な観測装置は高価である。本研究では市販の小型な計測装置を大学の屋上に設置して観測を試みた。蒲郡市御

* 愛知工科大学工学部電子ロボット工学科, 〒443-0047 愛知県蒲郡市西迫町馬乗 50-2

Department of Electronic Robot Engineering, Aichi University of Technology, 50-2 Manori, Gamagori 443-0047, Japan

幸町には、環境省が運営する大気汚染物質広域監視システム(Atmospheric Environmental Regional Observation System, AEROS)の測定局があり、そこで得られた観測データはウェブサイトで公開されているので、我々のPM_{2.5}データと比較して測定値の検証を行った[5]。また、観測の結果、2025年1月19日に高濃度のPM_{2.5}が確認されたため、その発生源について考察を行った。本稿では、これらの初期的な観測結果について報告する。

2. 観測

PM_{2.5}濃度の測定には、P-Sensor(株式会社アイデック)を用いた。検出可能な粒径は0.3 μm以上で、検出可能な濃度範囲は10~600 μg/m³となっている。データは1分間隔で記録された。一方、CO₂濃度の測定には、TR-76Ui(株式会社ティアンドデイ)を使用した。この機器の測定精度は±50 ppmに加え、読値の±5%である。こちらは1分間隔でデータを記録した。

計測機器は、電気設備用のボックスを流用して収納した。雨の侵入を防ぎながら外気を取り込めるよう、側面に3つ、下部に2つのルーバーを取り付けて工夫した。図1には、これらの計測器を配置したボックスを愛知工科大学の屋上に設置した様子が写されている。写真では、上部にP-Sensor、下部にTR-76Uiが設置されているのが確認できる。



Fig. 1 PM_{2.5} and CO₂ monitoring on the rooftop of Aichi University of Technology.

3. 結果と考察

2025年1月1日から8月29日までの期間に、愛知工科大学の屋上でPM_{2.5}の観測を行った結果を図2に示す。観測期間中には一部の時間帯や期間で濃度が高くなる傾向が見られたものの、全体として濃度は低く、環境基準を下回っていた。なお、大学から東へ約2.5 km離れた蒲郡市御幸町3350-1に、AEROSの測定局があり、PM_{2.5}濃度が観測されている。図3では、大学屋上での測定結果と御幸町のAEROSデータを比較しており、全体的に屋上での値の方が小さいものの、傾向はよく一致していた。値が小さくなった原因はボックス(図1)の通気性が良くなかったことなどが原因と考えられる。このことから、今回の簡便な測定方法でもPM_{2.5}の傾向を把握するには十分であると判断できる。

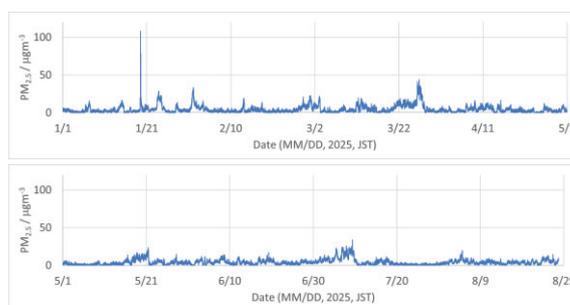


Fig. 2 PM_{2.5} concentrations on the rooftop of Building 7 from January 1 to August 29, 2025.

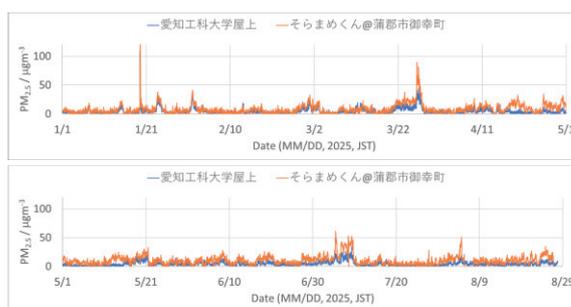


Fig. 3 PM_{2.5} concentrations on the rooftop of Aichi University of Technology and in Miyukicho, Gamagori from January 1 to August 29, 2025.

一部の時間帯で濃度が高くなっていたことから、その原因を探るためPM_{2.5}濃度と風向・風速との関係について分析を行った。風向と風速のデータには、気象庁の地域気象観測システム(Automated Meteorological Data Acquisition System, AMeDAS)を使用した。分析の結果、PM_{2.5}濃度と風向との間には明確な相関は見

られず、特定の方角に発生源が存在しないことがわかった。一方、風速との関係では、風速が高いほどPM_{2.5}濃度が低くなる傾向が確認された。しかし、この傾向だけでは、濃度が高くなった時間帯や期間の原因を十分に説明することはできなかったため、それぞれのイベントについて個々の要因があると考えられる。本稿では特に1月19日に観測された高濃度のPM_{2.5}に着目し、その発生源について考察を行った。

図4に示すように、1月19日のPM_{2.5}濃度は11時頃から上昇を始め、13時頃にピークに達し、その後徐々に減少した。御幸町のAEROSデータでも同様に13時にピークを示しており、両地点で一致した傾向が確認された。AMeDASの風向・風速データによると、蒲郡市の当日の風は10時に西南西(0.7 m/s)、11時に南南東(0.7 m/s)、12時に南(0.8 m/s)、13時に南西(0.6 m/s)、14時に南南東(1.8 m/s)と、いずれも穏やかな南方向からの風が吹いていた。このことから、PM_{2.5}は南方から運ばれてきた可能性が高いと考えられる。さらに、同日に周辺地域でもPM_{2.5}濃度が上昇していたかを確認するため、図5に示した各測定局の1月19日のデータを調査した。その結果、周辺の測定局では濃度の上昇は見られず、蒲郡市のみで特徴的な増加が確認されていたことがわかった。

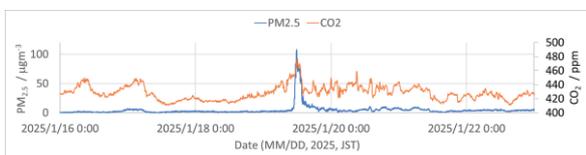


Fig. 4 PM_{2.5} and CO₂ concentrations on the rooftop of Aichi University of Technology from January 16 to January 22, 2025.



Fig. 5 PM_{2.5} monitoring stations around Gamagori City.

また、図4には愛知工科大学屋上で測定されたCO₂濃度の結果も示しており、PM_{2.5}濃度と同様の増減傾向が見られた。このことから、燃焼によって発生したPM_{2.5}が飛来してきた可能性があると考えられた。そこで、NASAが提供するFire Information for Resource Management System(FIRMS)のデータを確認した。FIRMSは、MODISやVIIRS衛星のセンサーによって火災などの熱源を検出し、地図上に赤い点として表示するシステムであり、森林火災だけでなく火山の噴火や爆発、さらには紛争地域の火災監視にも利用されている。

図6には、1月19日の蒲郡市周辺のFIRMS画像を示しており、工場がある地域や知多半島に熱源が確認された。知多半島では、立春の時期に「ぼた焼き」と呼ばれる野焼きが行われる。これは枯れ草を焼却することで景観の維持や林野火災の予防、水路や溜池の畦畔の保全を目的とした伝統的な行事であり、常滑市などで実施されている。実際に、1月19日に常滑市でぼた焼きが行われていたことが、常滑市南陵市民センター南陵公民館のウェブページで確認できる[6]。

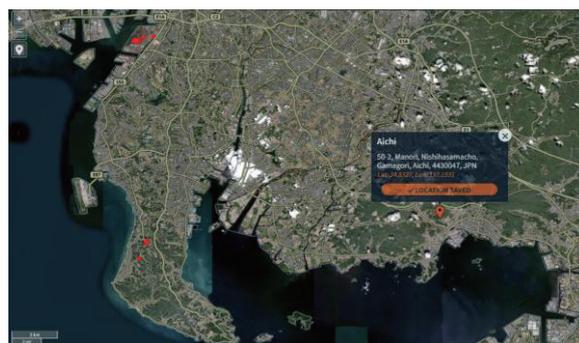


Fig. 6 NASA Fire Information for Resource Management System (FIRMS) satellite data for January 19, 2025. Red dots indicate areas of high temperature[7].

図7には、1月19日の愛知県における風速・風向のAMeDASデータを示している。10時から13時までの時間帯において、知多半島付近では北西からの風が吹いており、蒲郡市では南西から南方向の風が確認された。これらの情報を総合的に考えると、知多半島で行われた野焼きによって発生したPM_{2.5}が北西の風によって三河湾上空を漂い、その後南西から南方向の風に乗って局所的に蒲郡市へ飛来したと推定される。この日時の風向きによって海上を通過したため、周辺地域には拡散せず、偶然に蒲郡市のみが高濃度となった可能性が考えられる。



Fig. 7 Aichi Prefecture AMeDAS(Automated Meteorological Data Acquisition System) Real-Time Data (Wind Direction and Wind Speed) for January 19, 2025[8].

4. おわりに

2025年1月1日から8月29日までの期間、愛知工科大学の屋上に市販の小型PM_{2.5}濃度計とCO₂濃度計を設置して継続的な観測を行った。その結果、PM_{2.5}濃度は蒲郡市御幸町にあるAEROS測定局のデータと比較して、ほぼ同様の傾向を示していることが確認された。また、1月19日に観測された高濃度のPM_{2.5}については、AEROS、FIRMS、AMeDASの各種データを用いて分析を行い、発生源を推定することができた。

今後は、1月19日以外にもPM_{2.5}濃度が上昇している期間について、発生源の特定を進めていく予定である。例えば、7月29日の20時から21時にかけて濃度がやや高くなっていたが、この日は蒲郡まつりが開催されており、19時半から21時にかけて花火大会が行われていた。AEROSの御幸町測定局は花火の打ち上げ場所の北側に位置しており、当時は南風が吹いていたことから、花火の煙が測定された可能性が高いと考えられる。

また、3月下旬にPM_{2.5}濃度が上昇しているが、これは黄砂の影響によるものと推定される[9]。ただし、3月26日にはさらに濃度が高くなっており、この上昇には別の要因が関与している可能性があるため、現在その解析を進めている。

今後も継続的に観測を行って、データを蓄積して分析することで、蒲郡市の大気環境の把握に努めていきたい。

参考文献

- [1] 荻野和子, 竹内茂彌, 環境と化学 -グリーンケミストリー入門(第3版), 柘植秀樹, 東京化学同人, 発行都市名, 2018.
- [2] 鈴木孝弘, よくわかる環境化学, オーム社, 2019.
- [3] 環境省, “令和5年度大気汚染物質(有害大気汚染物質等を除く)に係る常時監視測定結果”, 環境省ホームページ, (参照日:2025年9月6日, <https://www.env.go.jp/content/000315455.pdf>)
- [4] 気象庁, “大気中二酸化炭素濃度の経年変化”, 2025年, (参照日:2025年9月6日).
- [5] 環境省, “大気汚染物質広域監視システム”, 環境省ホームページ, (参照日:2025年9月6日, <https://soramame.env.go.jp/>).
- [6] 常滑市南陵市民センター南陵公民館, “本日1月19日「ぼた焼き」大谷区”, 常滑市南陵市民センター南陵公民館ホームページ, (参照日:2025年9月6日, <https://tokoname-nanryou.com/2025/01/19/%E6%9C%AC%E6%97%A51%E6%9C%8819%E6%97%A5%E3%80%8C%E3%81%BC%E3%81%9F%E7%84%BC%E3%81%8D%E3%80%8D%E5%A4%A7%E8%B0%B7%E5%8C%BA/>).
- [7] NASA, “Fire Information for Resource Management System”, NASA homepage, (Retrieved September 6, 2025, <https://firms.modaps.eosdis.nasa.gov/map/#d:2025-01-19;@137.05,34.85,11.52z>).
- [8] 日本気象協会, “過去天気(アメダス・風向・風速)”, 日本気象協会ホームページ, (参照日:2025年9月6日, <https://tenki.jp/past/2025/01/19/amedas/5/26/wind.html>).
- [9] 日本気象協会, “明日25日は列島に「黄砂」が飛来 西日本中心に見通し悪化の恐れ 関東にも影響か”, 日本気象協会ホームページ, (参照日:2025年9月6日, https://tenki.jp/forecaster/r_tokuda/2025/03/24/33001.html#sub-title-b).

研究論文

多点同時測定が可能な触覚センサの開発

Li Guoxiu*, 裴 艶玲*, 大日方 五郎*

(2025年9月8日受理)

Development of a Multi-Point Simultaneous Measurement for Tactile Sensor

Guoxiu LI*, Yanling PEI* and Goro OBINATA**

(Received September 8, 2025)

Abstract

In recent years, the handling of complex shapes and fragile objects has become a significant issue in robot gripping technology. In this research, we have developed a light-transmitted tactile sensor to clearly detect the contact area and accurately estimate normal and shear forces through multi-point measurement.

キーワード: 透過光触覚センサ, 多点測定, 接触域

Keywords : Light-transmitted, Tactile Sensor, Multi-Point Measurement, Contact area

1. はじめに

近年, ロボット技術が急速に進化する一方で, 従来のロボットハンドにおける複雑な形状や壊れやすい物体の把持には, 把持力制御の困難さ, 形状対応性の不足, 対象物の破損といった課題が指摘されている. これらの課題を解決するため, 人の触覚機能に匹敵する触覚センサの開発が強く求められている.

大塚らはロボットハンドに取り付け可能な寸法のセンサを製作し, 接触力, 接触モーメント, 固着率を算出した. さらに, この触覚センサとロボットハンドを組み合わせることで, 最小の把持力で対処物を滑らせずに把持するピック制御の実現に成功した[1]. しかしながら, このセンサは接触中心位置が予め指定されているという制約がある. 加えて, ロボットハンドが凹凸のある不定形物把持する際, 接触域が2つ以上に分かれる可能性もある. そのような状況では, 既存のセンサでは力を正確に測定することが困難である. そこで我々は, 複数箇所の力を同時に測定可能なビジョンベース触覚センサを開発してきた[2]. しかし, これらの触覚センサの接触部は半透明であるため, 環境光の影響を強く受け, 力の測定誤差が大きいという課題を抱えている.

本研究では, 触覚センサのタッチパッドの膜を透過できる光を利用し, 接触領域の境界を明確に検出することを第一目的とする. さらに, 凹凸のある物体に対し, 複数箇所の力を計測する際, 中心点に近い四つ

のドットマーカを用いて法線力の測定, および中心点の変位からせん断力を推定する方法における計測誤差の低減を目指す.

2. ビジョンベース触覚センサの原理

本研究用いた触覚センサは, 図1に示すように, CMOSカメラ, 面発光LEDライト, およびマーカが付いた柔らかいタッチパッドで構成されている.

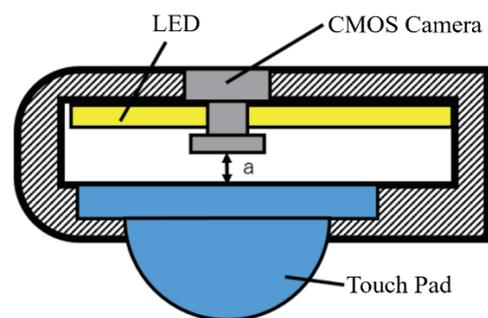


Fig.1 Schematic diagram of a vision-based tactile sensor

触覚情報は, 対象物とタッチパッドに接触した際に, カメラによって捉えられた画像から算出する. カメラでタッチパッドの曲面上のドットマーカの2次元位置を計測し, これによりタッチパッド表面の接触による変形を推定する[3]. 接触によりドットマーカは画像の外

* 愛知工科大学工学部電子ロボット工学科, 〒443-0047 愛知県蒲郡市西迫町馬乗 50-2

Department of Electronic Robot Engineering, Aichi University of Technology, 50-2 Manori, Gamagori, Aichi 443-0047, Japan

** 名古屋科学産業研究所, 〒486-0018. 名古屋市守山区桜坂五丁目 301 番地, 名古屋サイエンスパーク

Nagoya Industrial Science Research Institute, Nagoya Science Park, 5-301, Sakurazaka, Moriyama, Nagoya, Aichi 486-0018

側への広がり量と中心点の移動量から、接触における法線力、せん断力を測定することが可能である[2].

3. タッチパッド

対象物に接触するタッチパッドは図2に示したように、半透明な膜で覆われた半楕円体であり、内部は透明なウレタンジェルがアクリル板によって封入されている。

タッチパットの内側には、変形をと捉えやすくするため、黒色の円形ドットマーカーがマトリックス状に131個印刷されており、その中心には十字のマーカーが一つ印刷されている。また、ドットマーカーの外側外周には、破線状に黒い帯が印刷されている。

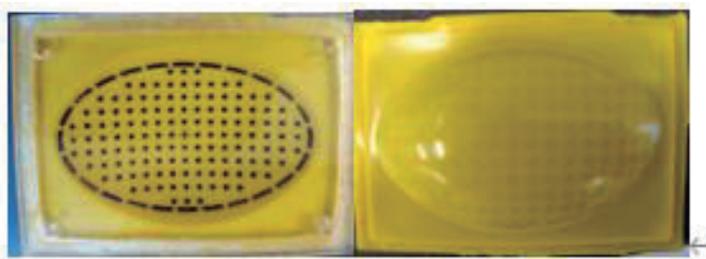


Fig.2 Touchpad

4. 光の透過性

対象物がタッチパッドと接触する際、外部光線の影響により、図3に示すような影が接触領域の周囲に生じることがある。これにより、接触境界を明確に検出が困難になる。本研究では、接触領域の境界を明確に検出することを一つの目的とし、タッチパッド表面の膜の光透過性について調査を行った。具体的には、異なる色のLED光源、タッチパッド、および接触物を組み合わせ、その影響を定量的に評価する。

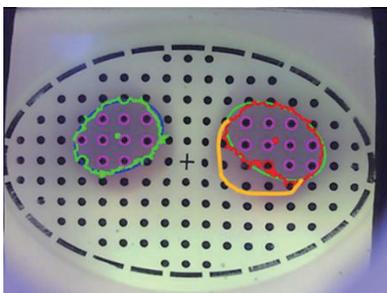


Fig.3 Shadows around the contact area

4.1 光の透過性の実験

本実験では、以下の3種類の変数を設定した。

1. LED光源の色: 赤, 本実験では、以緑, 青, 白の4種類で、LED光源を図4に示す。

2. タッチパッドの色の: 黄緑, シルバー, 黄色の3種類で、図5に示す。

3. 接触物の色: 緑, 赤, 青, 黄色の4種類で、図6に示す。

これらの組み合わせは、総数で4(LED色)×3(タッチパッド)×4(接触物)=48通りに及ぶ。

実験は、所定の色のLED光源でタッチパッドを照射し、その上に接触物を設置する形式で実施した。図7に実験の様子を示す。発生する光学的現象(透過光, 反射光, 影)はカメラを用いて記録し、ヒストグラム解析を行う。



Fig.4 LED light source

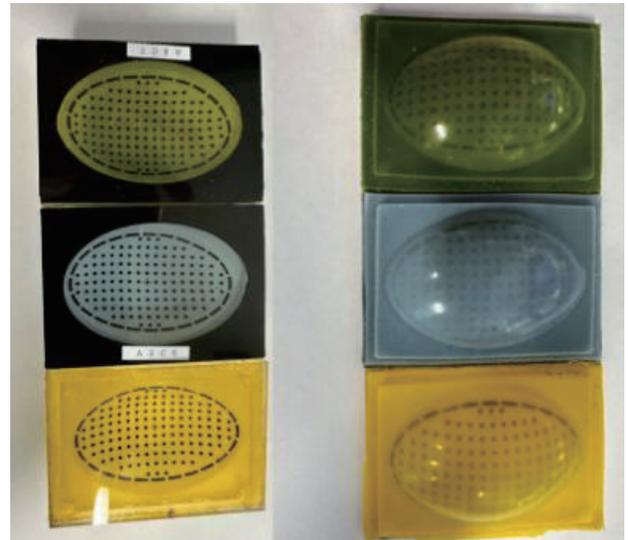


Fig.5 Three types of touchpads



Fig.6 Four types of contact objects

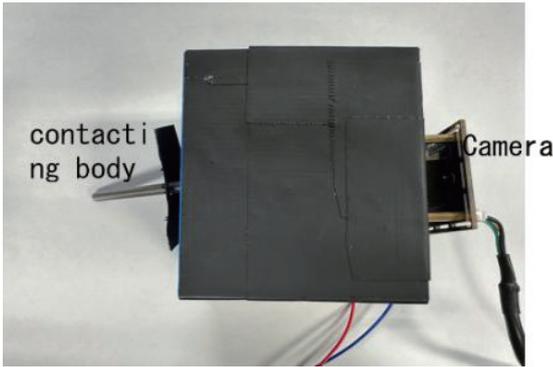


Fig.7 Experimental setup

4.2 光の透過性の実験データの分析

取得した画像データから、RGB 各チャンネルの輝度値の分布をヒストグラムとして抽出し、定性・定量的に比較・分析した。特に、接触前後のヒストグラムの変化に着目し、接触の有無及び接触物の色が光の透過性および検出信号に与える影響を調査した。

4.3 光の透過性の実験結果と考察

4.3.1 ヒストグラム解析による評価

各実験条件において、接触前後の RGB チャンネル別輝度ヒストグラムを取得した。接触前のヒストグラムを図 8 に示す。代表例として、赤色 LED と黄緑色タッチパッドを用い、黄色の接触物および緑色の接触物を設置した場合の結果をそれぞれ図 9 と図 10 に示す。

4.3.2 考察

異なる組み合わせにおいて、ヒストグラムの形状は LED の色、タッチパッドの色、接触物の色に強く依存して変化した。例えば、LED 光源の色と同系色の接触物を用いた場合、特定のチャンネルの輝度値が高く維持される傾向が観測された。逆に、補色の関係にある組み合わせでは、輝度値が大きく低下し、これが影として検出される可能性がある。タッチパッドの膜の色は、特定の波長の光を透過または吸収するため、全体の輝度レベルとコントラストに影響を与える主要

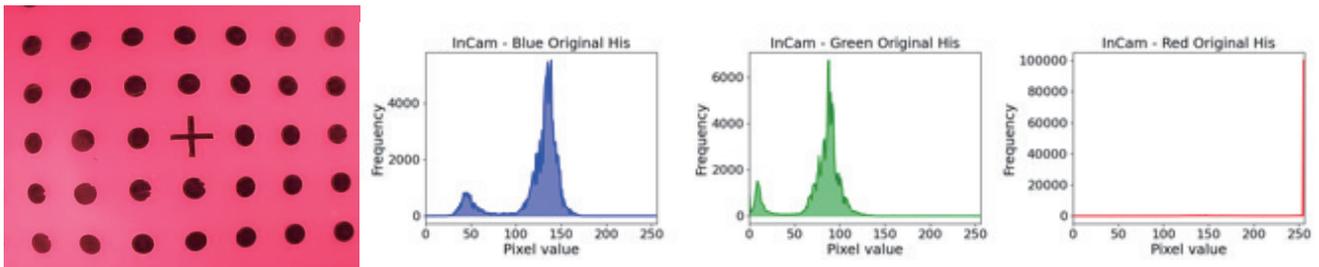


Fig.8 Image and histogram before contact

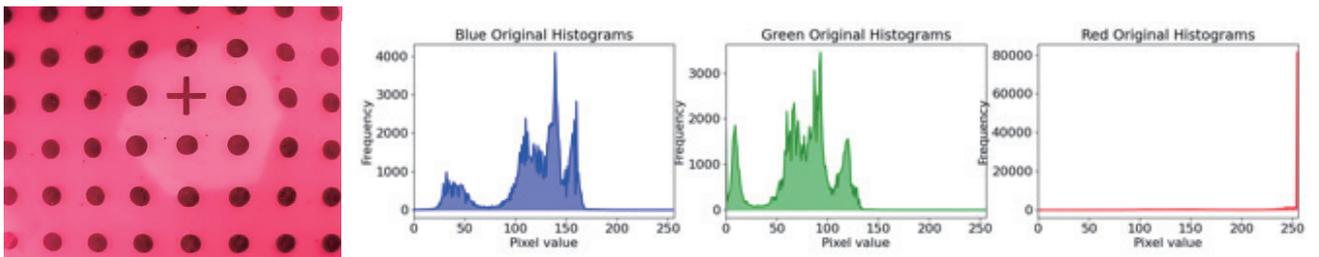


Fig.9 Contact image and histogram when using a yellow contact object

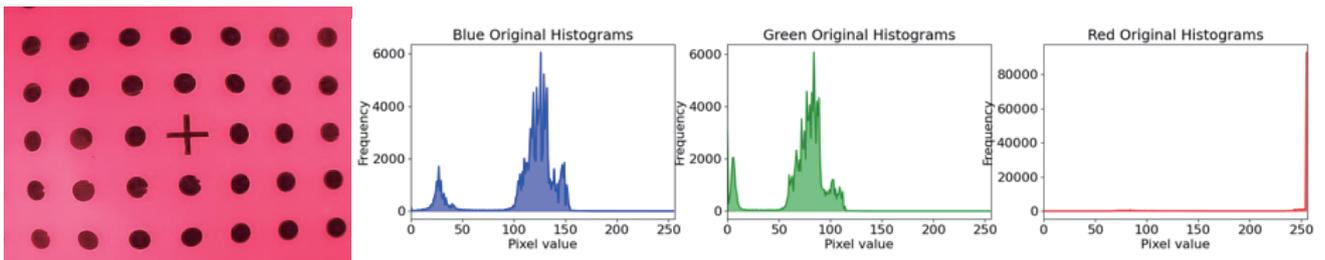


Fig.10 Contact image and histogram when using a green contact object

因であると考察される。

本研究では、タッチパッドの接触検出精度に影響を与える光学的要因について、LED 色、タッチパッド色、接触物色の観点から実験的に調査した。その結果、これらの要素の組み合わせがヒストグラム特性、ひいては接触境界の検出性能に大きく影響を及ぼすことが明らかとなった。

5. 画像処理

本研究では、接触領域の輪郭検出と、その領域内のドットマーカの識別するために、以下の手順で画像処理を実施した。

まず、輪郭検出のために以下のステップを実施する。
①接触時の元画像を図 11 に示してあり、検出対象となる特定の色の RGB 値範囲を事前に指定する。
②指定された RGB 値範囲内のピクセルを白色、範囲外を黒色とする図 12 のようなマスク画像を生成する。これにより、対象領域が明確に分離される。
③マスク画像から輪郭を検出し、それぞれの輪郭の面積を計算し、検出された輪郭をその面積の降順に整列する。
④各輪郭の中心座標を計算し、その輪郭と中心点を画像上に描画して可視化する。

次に、ドット検出のための処理が行う。
①接触領域に対応するマスク画像を作成する。
②このマスク画像から複数の輪郭を抽出する。
③特定の面積範囲内にある輪郭をドットとして識別する。
④識別された各ドットと、先に検出された輪郭の中心点との距離を計算する。
⑤最終的に、図 13 のように、検出されたドットとその識別番号が画像上に描画され、視覚的に表現する。

これらの画像処理によって、複雑な接触状況下においても、接触領域の境界を明確にし、内部のドットマーカの位置を正確に特定することが可能となる。

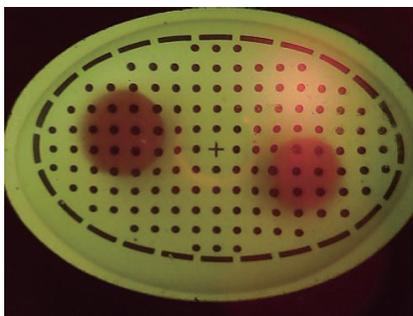


Fig.11 Contact image

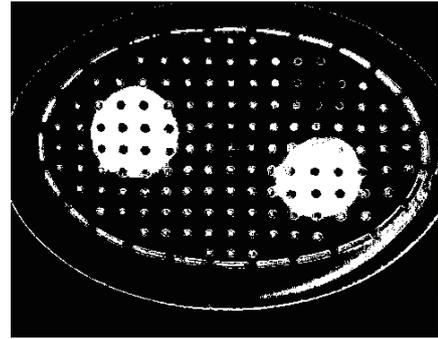


Fig.12 Mask image

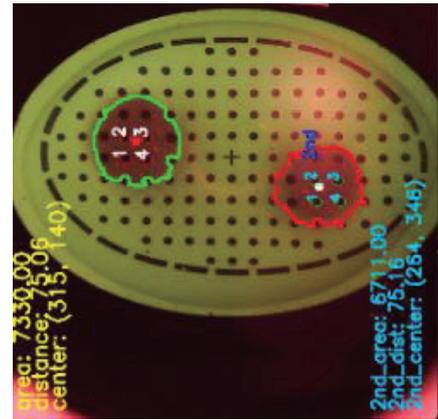


Fig.13 Dots detection image

6. 力の測定実験

6.1 実験装置

図 14 に実験装置を示す。この装置を使用して、垂直方向の法線力と水平方向のせん断力を測定する。図 15 は対象物とタッチパッドが接触する際の様子を示し、図 16 は接触力を加えるための装置を示す。



Fig.14 Experimental setup

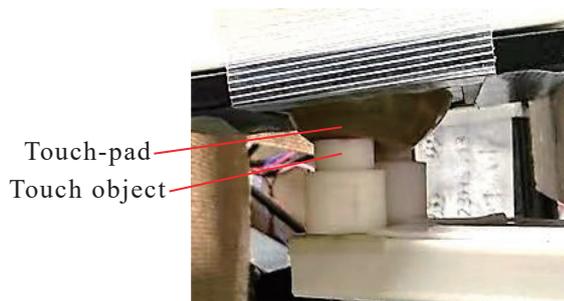


Fig.15 Contact state/situation



Fig.16 Input device

6.2 法線力の測定方法

法線力は、接触領域内の各ドットと接触域の中心点との距離を式(1)を使って算出している。

$$d_i = \sqrt{(x_i - o_x)^2 + (y_i - o_y)^2} \quad (1)$$

ここで、 x_i と y_i はドットの座標値、 o_x と o_y は接触域中心点の座標値である。

まず、中心点からの距離が最も近い4つのドットを選んで、それぞれに番号(1, 2, 3, 4)を付けている。次に、この4つのドットの全ての組み合わせ((1,2), (1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,4))について、ドット間のユークリッド距離を計算する。計算された6つの距離のうち、値が小さい順に3つを選んで、その合計を法線力としている。図17には、ドット間の距離が小さい時に繋いでいる例が示されている。

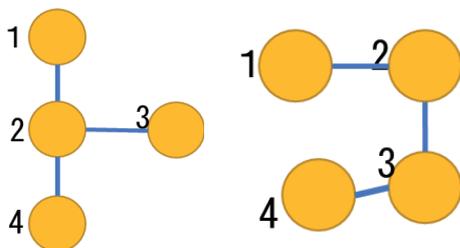
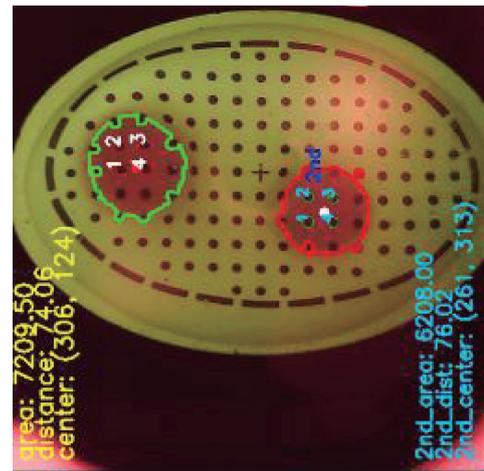


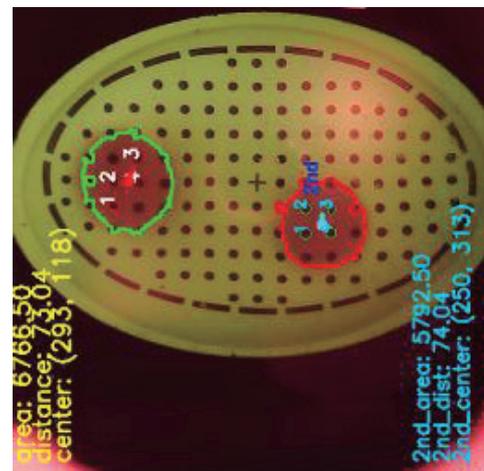
Fig.17 Dot connection method

6.3 セン断力の測定方法

せん断力は、中心点の座標がどれだけずれたかに基づいて測定している。具体的には、現在の中心点座標と初期状態における中心点座標の変位距離を測って、それをせん断力の大きさとして評価する。図18には、中心点の変位を示している。



(a) Initial center point coordinates



(b) Current center point coordinates

Fig. 18 Displacement of the center point

6.4 2か所の力の測定結果

水平方向の負荷を一定に保ちつつ垂直方向に荷重を加える実験を行い、その結果をTable 1にまとめている。この表は、垂直方向の荷重を100g, 150g, 200gとした際の、第一接触域および第二接触域における測定結果を示している。

Table1 Norma force measurement results

水平方向の重量 50[g]		
垂直方向の重量	第一接触域	第二接触域
100[g]	118.91[g]	119.69[g]
150[g]	147.23[g]	179.00[g]
200[g]	209.14[g]	215.31[g]

垂直方向の負荷を一定に保ちつつ水平方向に荷重を加える実験を行い、その結果を Table 2 にまとめている。この表は、水平方向の荷重を 50 g, 70 g, 100 g とした際の、第一接触域および第二接触域における測定結果を示している。

Table2 Shear force measurement results

垂直方向100[g]		
水平方向の重量	第一接触域	第二接触域
50[g]	43.75[g]	53.41[g]
70[g]	66.30[g]	71.32[g]
100[g]	89.96[g]	112.78[g]

6.5 考察

6.5.1 水平荷重固定時の垂直荷重測定分析

水平荷重を 50 g に固定した状態で、垂直荷重が増えるにつれて、両方の接触域での測定値も増えていることが分かった。ただ、第一接触域と第二接触域の測定値には、ある程度のバラつきが見られた。

6.5.2 垂直荷重固定時の水平荷重測定分析

垂直荷重を 100 g に固定した状態で、水平荷重が増えるにつれて、測定値も増える傾向がある。両接触域間の測定値の差は、荷重が増えるにつれて大きくなっている。100 g の水平負荷をかけた時に、約 22.82g の差が出ているし、これは接触条件が非対称になっていることが影響している可能性がある。

6.5.3 考察

両方の実験条件において、第二接触域の測定値が第一接触域より一貫して高いことが確認された。この結果は、センサのキャリブレーションに問題がある。あるいは接触条件が均一でないことによる可能性がある。また、材料の弾性限界やセンサの飽和特性も測定誤差の原因として考えられる。

さらに、水平方向と垂直方向の荷重が互いに影響し合う「交差感度」も確認されており、力の分解能には依然として課題が残っている。したがって、今後はキャ

リブレーション手法の改善や接触条件の均一化が必要である。

本研究で開発したセンサは、複数の接触点における力を同時に測定できることを実証したが、今後の課題としては、測定精度の向上とともに誤差の原因を詳細に特定することが挙げられる。なお本研究で実施したセンサパッドの光透過膜に色を付けて、カラーカメラで取得した画像の色情報を使用して画像処理する方法は、国際公開特許情報に記された内容に含まれているものである[4]。

謝辞

本研究は愛知工科大学特別研究推進プロジェクト研究助成の支援を受けて実施しました。

参考文献

- [1] G. Otsuka, G. Obinata, et.al, “Design and Characterization of a Plug-in Device for Tactile Sensing”, ICCINCO 2018, Porto Portuguese, pp.488-493, 2018.
- [2] 李国秀, 裴艶玲, 大日方五郎, ”ビジョンベース触覚センサによる複数箇所接触時の力計測”, 第 42 回日本ロボット学会学術講演会, 2024.9
- [3] Y. Ito, Y. Kim, G. Obinata, “Robust Slippage Degree Estimation based on Reference Update of Vision-based Tactile Sensor”, IEEE Sensors. Journal. 2011, pp. 2037-2047.
- [4] G. Obinata, H. Nishimura, K. Nakane, “Optical Tactile Sensor, Robot Hand, and Robotic Arm”, 国際公開番号: WO 2024/117139 A1, 2024.

研究論文

簡易脳波計を用いたヨガによるリラックス度向上の検証

磯貝 正弘*, 山田 慶*

(2025年8月8日受理)

Verification of Effectiveness of Relax Degree Advancement by Yoga Using Simplified Electroencephalograph

Masahiro ISOGAI* and Kei YAMADA*

(Received August 8, 2025)

Abstract

Yoga has been said that it has effectiveness of arranging one's mind and body, and so one can lead a stable life. By taking yoga poses, distortion of body can be concretely reformed, and change in flexibility of mind and body appears soon. In addition, yoga poses can make relaxed mind state by combining leisurely breath and meditation. Yoga has a feature that it can dissolve one's accumulated distortion of body, and make an energetic and positive body and obtain mild mind by continuing to do it. In this study, we measure change in brain waves before and after doing yoga, and relax degree in case of continuing to do it. We confirmed the effectiveness of advancement of relax degree by doing yoga, using a simplified electroencephalograph through a number of experiments.

キーワード: 簡易脳波計, リラックス度, ヨガ

Keywords : Simplified electroencephalograph, Relax degree, Yoga

1. はじめに

ヨガには、心と体を整える効果があり、習慣にすることで安定した生活を送ることができるとされている。ヨガのポーズをとることで体のゆがみが矯正されて、やがて柔軟性など目に見える変化が現れ、具体的には次のような効果があると主観的、定性的に言われている[1].

- (1) ポーズで体のゆがみが矯正され、やがて柔軟性など目に見える変化が現れる。
- (2) ゆったりした呼吸や瞑想を組み合わせることで、リラックスした精神状態を作り出すことができる。
- (3) 活気に満ちてポジティブな体になり、穏やかな気持ちを得ることができる。

ヨガは現在のストレス社会の心身の健康を保持するために日常的に使われているが、ヨガの効果を科学的に検証した研究例が少ない。ヨガの効果と脳波との関係に関する研究としては、ヨガの瞑想法や呼吸法と脳波との関係を調べ、それぞれの効果について研究した

例はいくつかある[2][3][4]。しかし、ヨガのポーズを取ったときの脳波を調べ、その時の効果について研究した例はほとんどない。一方、文献[5]では、ヨガの動作、呼吸法とストレス軽減効果との関係について調査しているが、調査方法として、心拍変動、唾液コルチゾール、質問紙による方法が用いられている。

そこで、本研究では文献[5]で用いられている方法と比べ、生理学的な専門知識を必要としない、機器の使用方法が容易である、機器が大掛かりでなく安価である、定量的で効率的に効果を検証できるといった利点があるという理由で、簡易脳波計を用いてヨガのポーズをする前と後のリラックス度の変化と、ヨガのポーズを継続した場合のリラックス度の変化を測定する。本研究で行っているヨガのポーズは静的な作法で、文献[5]で行っているヨガの動作は動的な作法であり、両者は異なるヨガの作法である。本研究では、簡易脳波計を用いて、ヨガの静的な作法であるポーズをすることでリラックス度が向上するのかを客観的、定量的、効率

* 愛知工科大学工学部電子ロボット工学科, 〒443-0047 愛知県蒲郡市西迫町馬乗 50-2
Department of Electronic Robot Engineering, Aichi University of Technology, 50-2 Manori, Gamagori, Aichi 443-0047, Japan

的に検証する方法を提案し、実験によりヨガの効果を検証したので報告する。

2. 脳波について

脳波は周波数によって5つに分類され、周波数の大きい順に γ (ガンマ) 波、 β (ベータ) 波、 α (アルファ) 波、 θ (シータ) 波、 δ (デルタ) 波がある。この周波数が大きくなるにつれ脳の働きが活発になり、逆に小さくなるにつれて活動していない状態となり、 α 波を基準に γ 波、 β 波は速波となり、 θ 波、 δ 波は徐波となる。それぞれの波形の説明を表1に示す[6]。

3. 実験装置

3.1 簡易脳波計の概要

図1に、本研究で脳波を測定するために用いた簡易脳波計である、InteraXon社製のMuse2の写真を示す。Muse2はリアルタイムに脳波の状態を測定し、アプリケーションソフトを通して瞑想フィードバックを得ることが可能な世界初のウェアラブルデバイスである。Muse2の専用アプリケーションソフトを連携することで、脳の活動・心拍数・呼吸・体の動きに関するリアルタイムのフィードバックを提供できる[7]。

本研究では、 γ 波、 β 波、 α 波、 θ 波、 δ 波の5種類の脳波を測定している。本研究の目的は特にリラックス度に関係の深い α 波の、ヨガの前後の変化を調べることである。

Table 1 Category and explanation of brain waves

名称	周波数 [Hz]	分類	心理状態
γ 波	30~70	速波	予知, 明瞭, 興奮状態
β 波	13~30	速波	活発な思考, 集中状態
α 波	8~30	—	リラックス, 視覚化, 想像力
θ 波	4~8	徐波	眠気, 瞑想, 記憶力, 潜在意識
δ 波	0.5~4	徐波	睡眠, ヒーリング, 隔離された認識



Fig.1 Simplified electroencephalograph (Muse2)[7].

Table 2 Specification of Muse2

本体重量	200g
本体サイズ	W(177mm)×D(139mm)×H(7mm)
GoodBrain アプリによる CSV 出力項目	周波数のバンドパワー (10Hz) 脳波の生データ(約 50Hz) 動きに関するデータ バッテリーに関するデータ 脳波計のフィット具合
連続稼働時間	約 5 時間
充電時間	約 3 時間以内
接続方法	Bluetooth 4.2
充電ポート	MicroUSB ポート
専用アプリ対応 OS	iOS 11, Android 5 以降

3.2 簡易脳波計の詳細

表2に簡易脳波計 Muse2 の仕様を示す。

3.3 アプリケーションソフト

Muse2の専用のアプリケーションソフトである「Muse」を携帯電話にダウンロードし、連携することで脳の活動・心拍数・呼吸・体の動きに関するリアルタイムのフィードバックを見ることが出来る。また、「Mind Monitor」を用いることで詳細な数値を表示することができたため、今回の測定ではこの2つのアプリケーションソフトを使用して脳波を測定した。

4. リラックス度向上の検証実験

4.1 実験1

4.1.1 実験目的

実験1では、ヨガ教室などで多く取り入れられていることを想定して、複数の異なるヨガのポーズを比較的短時間で組み合わせを行ったときのリラックス度向上の効果を調べることを目的にして実験を行った。

4.1.2 実験方法

実験1の実験方法を以下に示す。

- (1)ヨガを行う前の5種類の脳波(δ 波、 θ 波、 α 波、 β 波、 γ 波)を5分間測定した。
 - (2)付録の図 A1~A8 で示した8種類のヨガを1ポーズ45秒間行った。休憩と次のポーズの準備時間を10秒間とした。
 - (3)ヨガを行った後の5種類の脳波を5分間測定した。
- 実験1では、1回の測定時間は30分間となり、3人の被験者で実験を行った。測定回数は20回とし、5種類の脳波の平均値の変化を調べた。また、全20回のヨガ前の α 波の平均値、ヨガ後の α 波の平均値、ヨガ

前とヨガ後の差分の平均値, 差分の標準偏差, 差分の最大値, 差分の最小値を計算で求めた.

4.1.3 実験結果

被験者 Y の5種類の脳波の平均値の変化を調べた結果として, ヨガを行う前と行った後のグラフを図 2, 3 に示す. 図 2, 3 は, 1回 5分の5種類の脳波の測定値をそれぞれ1回ごとに平均したものを, 20回分プロットしたものである.

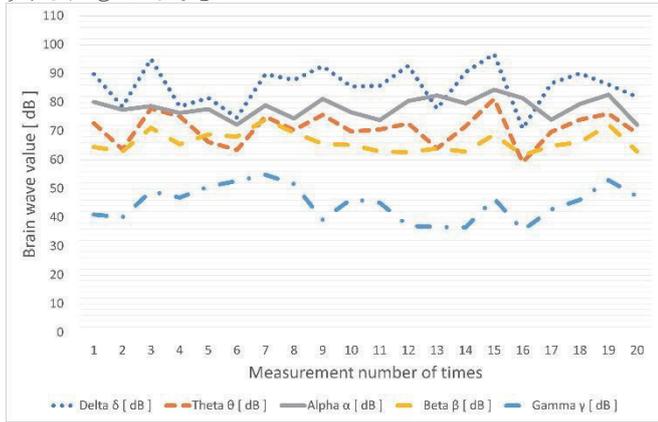


Fig.2 Change in average of brain wave of subject Y before Yoga.

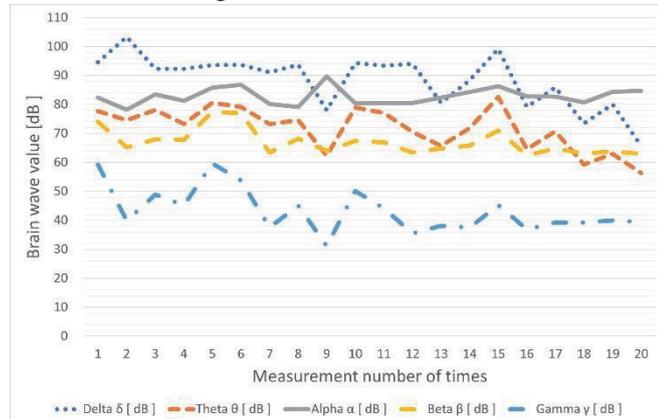


Fig.3 Change in average of brain wave of subject Y after Yoga.

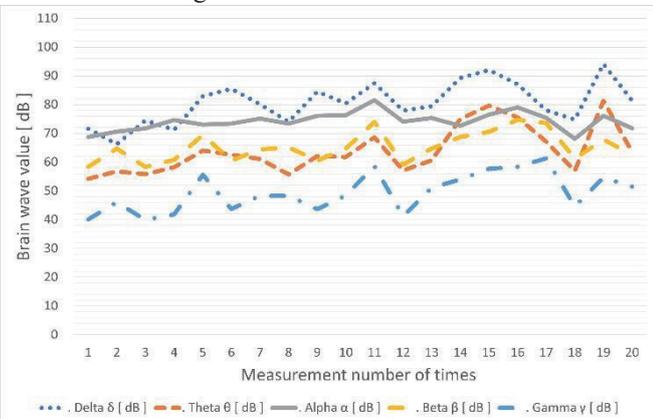


Fig.4 Change in average of brain wave of subject M before Yoga.

被験者 M の5種類の脳波の平均値の変化を調べた結果として, ヨガを行う前と行った後のグラフを図 4, 5 に示す. 被験者 S の5種類の脳波の平均値の変化を調べた結果として, ヨガを行う前と行った後のグラフを図 6, 7 に示す.

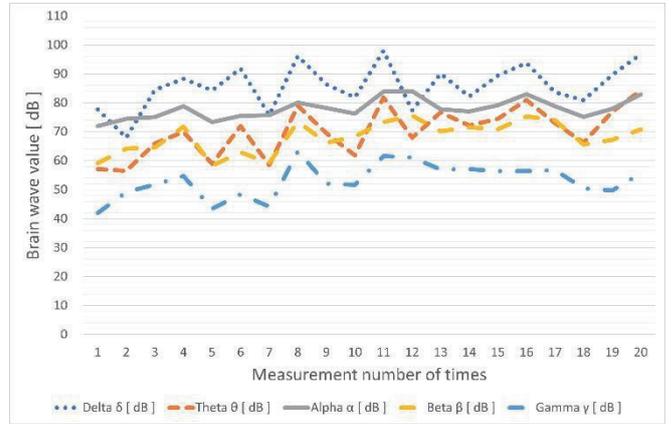


Fig.5 Change in average of brain wave of subject M after Yoga.

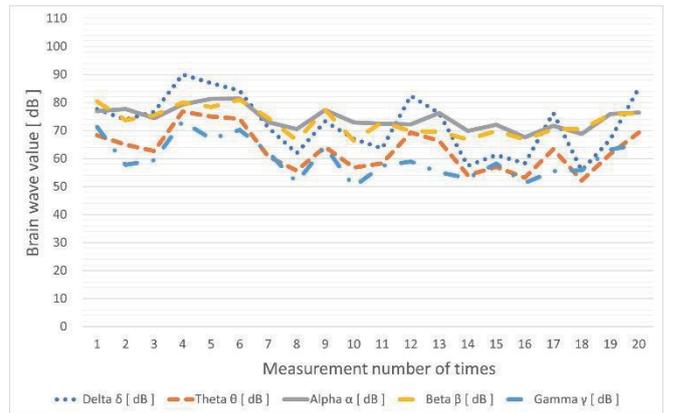


Fig.6 Change in average of brain wave of subject S before Yoga.

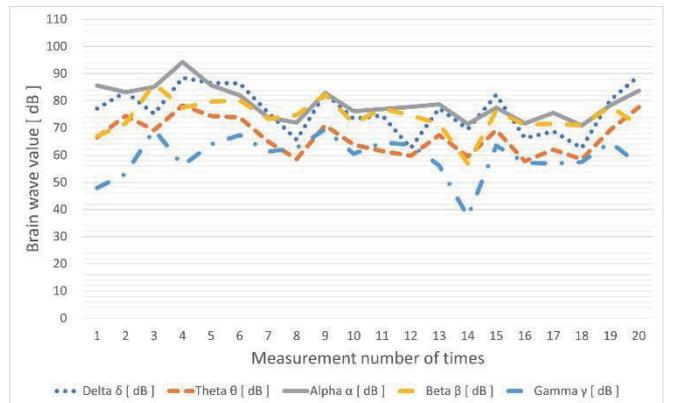


Fig.7 Change in average of brain wave of subject S after Yoga.

今回は、リラックス度である α 波の検証であるため、ヨガを行う前と行った後の α 波を比較した。被験者 Y の α 波を比較したグラフを図 8 に示す。被験者 M の α 波を比較したグラフを図 9 に示す。被験者 S の α 波を比較したグラフを図 10 に示す。

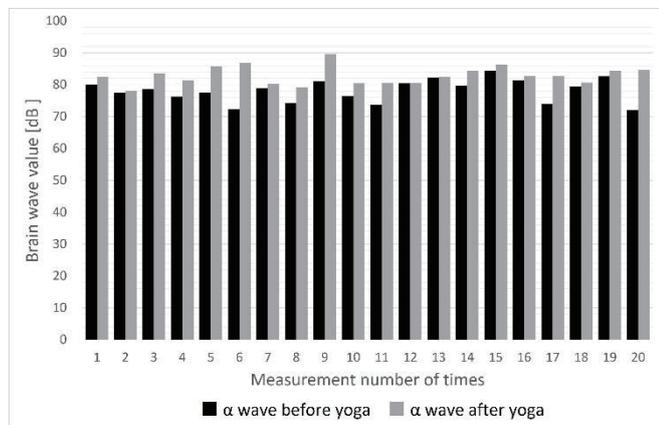


Fig.8 Comparison of α brain wave between before and after Yoga of subject Y.

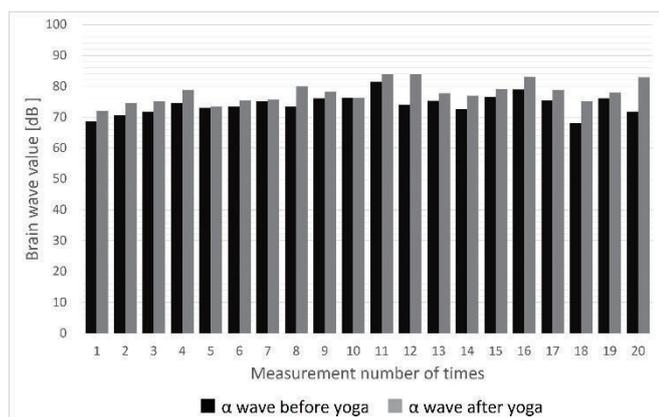


Fig.9 Comparison of α brain wave between before and after Yoga of subject M.

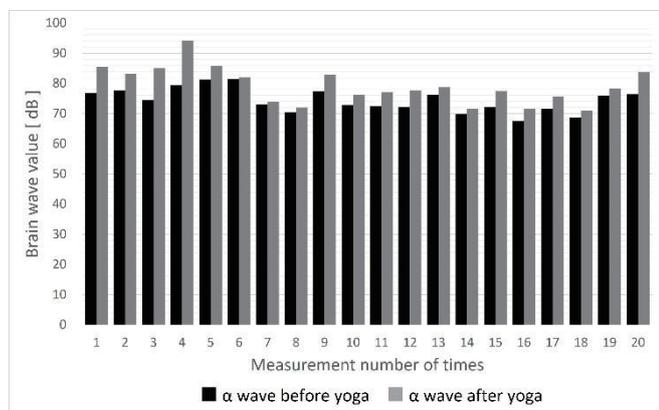


Fig.10 Comparison of α brain wave between before and after Yoga of subject S.

4.1.4 考察

図 9 と図 10 より、1 回目と 20 回目とのヨガ前とヨガ後の脳波 (α 波) の強さの差分の、被験者 M と被験者 S の平均は 3.2[dB] であった。後述するように、被験者 M と被験者 S の差分の標準偏差は、それぞれ、2.92[dB] と 3.55[dB] であった。これらのことから、ヨガのポーズの回数を重ねることによるリラックス度向上の度合いは増加せず、変化は少ないことがわかった。今回は、後述するように被験者 Y の差分のばらつきが大きかったため、差分の平均を計算する際に被験者 Y の差分を除いた。

一方、実験 1 で求めた被験者 3 人の α 波の測定結果をまとめて計算した結果を表 3 に示す。

表 3 を見ると、被験者 Y, M, S のヨガ前とヨガ後の差分の平均を比較すると、被験者 S が最も高い 4.78[dB] を示し、ヨガの効果が顕著であることがわかった。一方で、被験者 M は差分の平均が最も低い 3.80[dB] となったが、標準偏差が 2.92[dB] と最も小さく、安定した結果が得られていることがわかった。これは、被験者 M のリラクゼーション効果が一貫して得られていることを示している。

また、被験者 Y では標準偏差が 4.12[dB] と最も大きく、個人差が顕著となった。特に、差分の最大値は 14.6[dB] となり非常に大きな効果が表れた一方で、差分の最小値は 0.1[dB] となり効果が見られなかった。このような変動は、被験者の測定時の体調や集中度、外的条件の影響が大きかった可能性があると考えられる。

被験者 S は差分の最大値は 15.0[dB] を記録し、特定の条件下で非常に高いリラクゼーション効果が得られたことを示している。しかし、差分の最小値は 0.6[dB] であり、全体的なばらつきがみられた。この結

Table 3 Computational results of α brain wave on experiment 1.

項目	被験者 Y	被験者 M	被験者 S
ヨガ前の α 波の平均[dB]	78.1	74.2	74.4
ヨガ後の α 波の平均[dB]	82.8	78.0	79.2
差分の平均[dB]	4.70	3.80	4.78
差分の標準偏差[dB]	4.12	2.92	3.55
差分の最大値[dB]	14.6	11.1	15.0
差分の最小値[dB]	0.100	0.00	0.600

果から、測定条件や被験者の状態による影響が引き続き課題として挙げられる。

4.2 実験2

4.2.1 実験目的

実験1では、各回でのリラックス度向上の効果が α 波の強さから検証されたが、回数を重ねても、リラックス度向上の効果の度合いの変化は少なかった。そのため、実験2では、複数の異なるヨガのポーズを短時間で行うのではなく、1つのポーズに集中して長時間にわたってヨガのポーズを行うことにした。実験2では、ヨガのポーズの回数を重ねることでリラックス度の向上の効果が度合いが増加し、変化していくかどうかと、1回のヨガのポーズによるリラックス度の効果の度合いの大きさに実験1との違いがあるかどうかについて調べることを目的に、実験を行った。

なお、長時間ポーズをとるのにヨガ初心者にとって安楽座のポーズが最適なポーズであると考えたため、1つのヨガのポーズとして、安楽座のポーズを採用した。

4.2.2 実験方法

実験2の実験方法を以下に示す。

- (1)ヨガを行う前の5種類の脳波を5分間ずつ測定した。
- (2)付録の図 A1 で示した安楽座のポーズのみを30分間行った。
- (3)ヨガを行った後の5種類の脳波を5分間ずつ測定した。

実験2では、1回の測定時間を50分間と延長し、ヨガのポーズを1つに絞り、被験者1人で実験を行った。測定回数は20回とし、5種類の脳波の平均値の変化を調べた。また、実験1と同様に、全20回のヨガ前の α 波の平均値等を計算で求めた。

4.2.3 実験結果

被験者Yの5種類の脳波の平均値の変化を調べた結果として、ヨガを行う前と行った後のグラフを図11、12に示す。

実験1と同様に、実験2についてもリラックス度である α 波の検証が実験目的であるため、ヨガを行う前と行った後の α 波を比較した。実験2の被験者Yの α 波を比較したグラフを図13に示す。

4.2.4 考察

実験2では、ヨガのポーズの回数を重ねるごとに α

波の強さが増し、ヨガのポーズによるリラックス度向上の度合いが変化し、増加していくことが期待された。しかし、後述するようにリラックス度の向上はその回での効果が認められたが、回を重ねることによるリラックス度の向上の度合いの増加は少なかった。図13より、1回目から5回目までは、ヨガ前とヨガ後の α 波の強さの差分が6.3[dB]から15.3[dB]に増加し、リラックス度向上

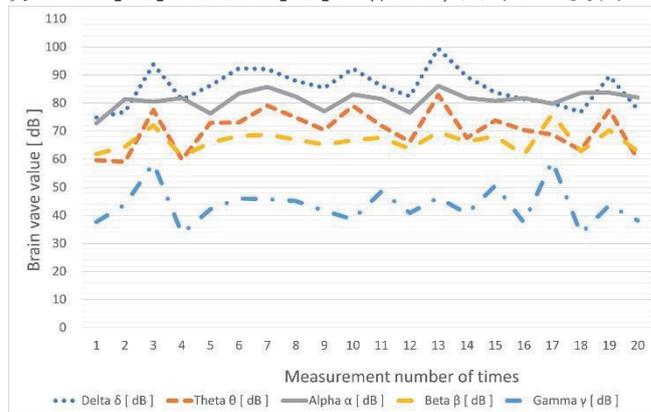


Fig.11 Change in average of brain wave of subject Y before Yoga.

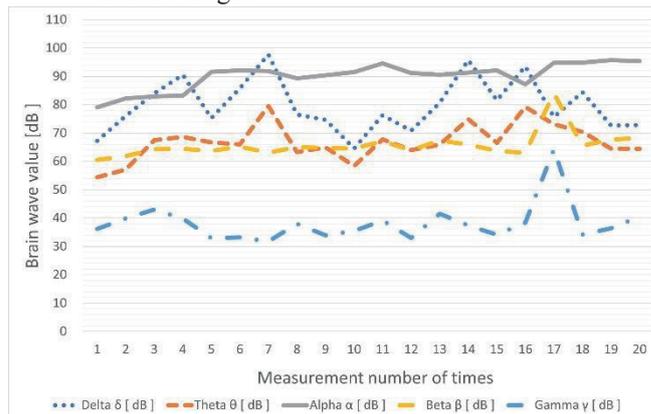


Fig.12 Change in average of brain wave of subject Y after Yoga.

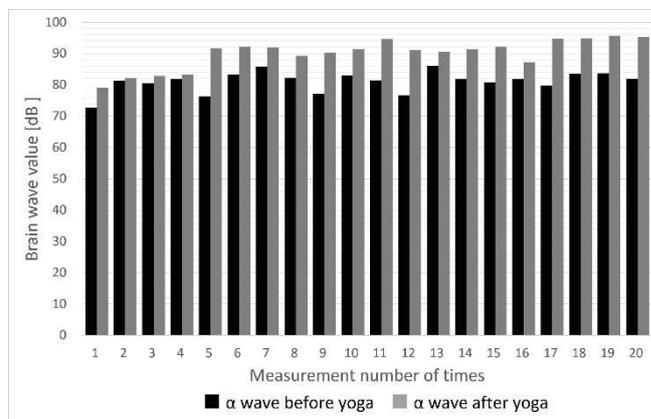


Fig.13 Comparison of α brain wave between before and after Yoga of subject Y.

の度合いの変化がみられた。しかし、20 回目のヨガ前とヨガ後の α 波の強さの差分が 13.4[dB]であり、5 回目と比べて増加してはなく、むしろ、減少している。このことから、ヨガのポーズを1つに集中して長時間行っても、リラックス度の向上の度合いは、回数を重ねて継続していても増加しないことがわかった。

実験2で求めた被験者 Y の計算結果を、比較のために実験1の結果と合わせて、表4に示す。表4を見ると、実験2のヨガでは差分の平均が 8.99[dB]となり、実験1のヨガの差分の平均である 4.70[dB]の約2倍の効果を示した。これは、1ポーズを長時間持続することで、より深いリラクゼーション状態が得られている可能性を示している。1 ポーズについて30分間という持続時間が、リラックス状態の深化に寄与したと考えられる。このことから、複数の異なるヨガのポーズを組み合わせる短時間行うよりも、ヨガのポーズを1つに絞り、長時間に渡り行うほうが、測定 1 回あたりのヨガによるリラックス度向上の効果が大きいことがわかった。

また、実験1と実験2の両方の実験で差分の最大値が 14.6[dB]と 15.3[dB]のほぼ同程度であり、被験者 Y において高い効果がみられる点は共通していると考えられる。これは、ヨガの形式にかかわらず、リラクゼーション効果を発揮できる可能性があることを示している。

標準偏差では、実験2のヨガが 4.60[dB]であり、実験1のヨガの 4.12[dB]の標準偏差より大きくなった。長時間持続する形式では、集中力の持続が困難になる可能性があるが、短時間でポーズを複数行う形式では、安定した効果が得られやすいと考えられる。

7. おわりに

本研究では、簡易脳波計を用いて脳波を計測し、

Table 4 Computational results of α brain wave on experiment 1 and 2 of subject Y.

項目	被験者 Y の 実験1のヨガ	被験者 Y の 実験2のヨガ
ヨガ前の α 波 の平均[dB]	78.1	81.1
ヨガ後の α 波 の平均[dB]	82.8	90.1
差分の平均 [dB]	4.70	8.99
差分の標準偏 差[dB]	4.12	4.60
差分の最大値 [dB]	14.6	15.3
差分の最小値 [dB]	0.100	0.800

ヨガのポーズによるリラックス度向上の効果を検証する方法を提案し、ヨガの効果を客観的に、定量的に確認した。実験1の短時間で複数のヨガのポーズを行う形式のヨガと実験2の1ポーズを長時間持続する形式のヨガの2種類の形式の効果の比較をした。それぞれの特徴とリラクゼーション効果について調べた。

実験結果として、実験1と実験2とも、測定1回あたりのヨガのポーズによるリラックス度向上の効果について検証された。特に、実験2の形式のヨガでは差分の平均が実験1の形式のヨガに比べて約2倍に達した。短時間で複数のポーズを行う形式のヨガよりも、1つのポーズを長時間持続する形式のヨガのほうが、より大きなリラクゼーション効果があることが確認された。また、実験1の形式のヨガでは標準偏差が小さく、安定した効果を示しており、初心者や多様な被験者に適した形式ではないかと考えられる。

一方、実験1と実験2の両形式のヨガとも、ヨガを継続して回数を重ねても、ヨガのポーズによるリラックス度向上の効果の度合いは増加せず、ほとんど変化しないことがわかった。

実験2の形式のヨガでは、差分の最大値が 15.3[dB]に達し、深いリラクゼーション状態が得られることがわかった。実験2の形式は、長時間の集中力や持続力が要求されるため、ヨガ経験者や深いリラクゼーションを求める場合に適していると考えられる。

実験1と実験2の両形式のヨガともに、被験者 Y については、差分の最大値が 14.6[dB]と 15.3[dB]と高い数値を記録しており、特定の条件下で非常に高い効果が得られる可能性があることが示唆される。一方で、差分の最小値が 0.1[dB]と 0.8[dB]となり、すべての測定回で効果が確認できたわけではない。この結果から、被験者の体調や心理状態、環境条件などが影響していると考えられる。

参考文献

- [1] ULLR MAG., “いまさら聞けないヨガの効果。カラダ以上にココロを整えてくれる”, https://www.descente.co.jp/media/editors_picks/feature/24539/ (参照日:2025年12月23日)
- [2] 茅原正, “坐禅時の呼吸, 脳波と脳血流—その相互関連性に関する総合的検討・考察—”, 駒澤大学心理学論集, 第19号, pp.11-22, 2017.
- [3] 佐藤浩一郎, 工藤卓, “瞑想時脳波の特徴抽出と集中との関係性”, 第36回ファジィシステムシンポジウム講演論文集, pp.233-236, 2020.
- [4] 奥原れいな, “瞑想とヨガが脳波にもたらす影響について”, <https://src.tama.ac.jp/files/1363.pdf>, (参照日:2025年11月20日)
- [5] 吉田直美, “ヨーガのストレス軽減効果における動作と呼吸の役割”, 東京都立大学大学院修士学位論

文, pp.12-50, 2021.

[6] みるまの Blog, “脳波とは?”,

<https://mirumanoblog.com/brain-waves/> (参照日: 2024年7月23日)

[7] GOODBRAIN, “脳波デバイス MUSE2”,

<https://goodbrain.jp/devices/muse/> (参照日: 2024年8月10日)

付録

A1. ヨガについて

A1.1 ヨガとは

ヨガはインドのみならず日本や中国など東洋で3千年以上昔から行われてきた生き方のための方法と考え方である。日本には、奈良時代から仏教に取り入れられた修行方法として入っており、禅宗の座禅もディアーナというヨガの瞑想を指す語であり、弘法大師もヨガで能力開発をした。身体の柔軟や筋力、バランスを向上させるだけでなく、心身の調和やストレスの軽減、集中力の向上、内的な平穏感の醸成にも役立つと言われている。また、ヨガは霊的な成長や自己探求にも関連しており、心の安定や内的な洞察を促すことがある。

ヨガは本来、生命－自然－真理を「結ぶ」という意味であり、心理に目覚めて人間としての正しい生き方をすることがヨガである。身体のポーズ(アーサナ)、呼吸法(プラーナヤーマ)、瞑想(ダーナ)、倫理規範(ヤマ・ニヤマ)などの要素から成り立っている[A1].

A1.2 ヨガの内容

実験方法1で行ったヨガのポーズの仕方と効果を図1~8に示す。

(1)安楽座



Fig.A1 Pose of anrakuza[A2].

安楽座のポーズを図 A1 に示す。安楽座のポーズ

の姿勢の仕方は次のようである[A3].

- かかとを身体の中心で揃える。
- 坐骨を均等につけ、骨盤をまっすぐに立てる。
- 肩の力を抜いて胸を開く。
- 手は楽な位置、または太ももの上に置く。

安楽座の効果は次のようである[A2].

- 恥骨や骨盤底を安定させ、姿勢を整えることで股関節の柔軟性を向上させる。

(2)猫の背伸びのポーズ



Fig.A2 Pose of cat overreach[A4].

猫の背伸びのポーズを図 A2 に示す。猫の背伸びのポーズの姿勢の仕方は次のようである[A5].

- 四つん這いの状態になり、膝は股関節の真下に置く。
- お尻の位置を動かさずに胸を床へ近づけ、おでこを床につける。両手は前方に伸ばす。
- 胸やお腹の伸びを感じながら、数回呼吸を繰り返す。

猫の背伸びのポーズの効果は次のようである[A4].

- 姿勢を正し、背面上部と胃や背中の上部を刺激し消化器系を整える。

(3) 猫のポーズ



Fig.A3 Pose of cat[A6].

猫のポーズを図 A3 に示す. 猫のポーズの姿勢の仕方は次のようである[A7].

- 四つん這いの状態になり, 手首は肩の真下, 両膝は足の付け根の真下に置く.
- 肘は外側を向くようにし, 膝と膝の間はこぶし 1 つ分程度開く.
- 鼻から大きく息を吸い, 吐く息で背中を丸め, 視線はお腹をとらえる.
- 息をゆっくり吸いながら背中をそらせていき, 視線は正面を向く.
- この流れをワンセットとして呼吸に合わせて, 5~8 回繰り返す.

猫のポーズの効果は次のようである[A6].

- 骨盤の安定や骨盤の後屈および前傾のひずみの調整, 腹部への刺激.

(4) 牛の顔のポーズ

牛の顔のポーズを図 A4 に示す. 牛の顔のポーズの姿勢の仕方は次のようである[A9].

- 足をまっすぐ前に伸ばし, 長座の状態に座る.
- 右足の膝を立て, 左足の外側へ置く.
- 右足を両手で抱えるようにし, 身体のほうへ引き寄せる.
- 左足も膝を曲げ, かかとを右のお尻のほうに寄せ

る.

- 右手を天井方向へまっすぐ伸ばし, 吐きながら頭の後ろで肘を折り曲げる.
 - 左手を身体の方に回し, 吐きながら肘を折り曲げ, 両手を背中の方で繋ぐ.
 - そのままゆったりと 3 呼吸ほどキープする. (左右を入れ替えて反対側も同様に行う.)
- 牛の顔のポーズの効果は次のようである[A8].
- 肩関節が柔軟になり肩こりの予防や坐骨神経痛の改善, 呼吸器トラブルが改善される.



Fig.A4 Pose of cow's face[A8].

(5) ねじって膝を顔につけるポーズ



Fig.A5 Pose of twisting and touching the knee to the face[A10].

ねじって膝を顔につけるポーズを図 A5 に示す. ねじって膝を顔につけるポーズの姿勢の仕方は次のようである[A11].

- 右足を横に伸ばして座り, 左膝を曲げて, 左足のかかとをへその延長線に置き, 両方の坐骨に体重を均等にのせる.
- 右手で右足の指先をつかむ. このとき, 右の脇腹が縮まないように体側を伸ばすと同時に, 右足の真上に体をのせるように上半身を右に傾ける.
- 左手を頭上に上げ, 左胸を天井方向に向けながら, 左手を右手に近づける. 右足裏を後ろに押し,

足先と膝を真上に向け、姿勢を安定させて視線を天井方向に向ける。反対側も同様に行う。

ねじって膝を顔につけるポーズの効果は次のようである[A10].

- ウエストの引き締め、冷えの改善、股関節の柔軟性を高める。姿勢を正し、背面上部と胃や背中の上部を刺激し消化器系を整える。

(6)膝に顔をつけるポーズ



Fig.A6 Pose of touching the knee to the face[A12].

膝に顔をつけるポーズを図 A6 に示す。膝に顔をつけるポーズの姿勢の仕方は次のようである[A13].

- 右足を伸ばした状態で、左足の膝を立てて床に座る。
- 左足の膝を外側へ倒し、足の裏を右足に内ももにつける。
- 骨盤を正面に向け、右足のつま先は天井を向ける。
- 両手を伸ばした足の膝の横あたりに置き、息を吸いながら背筋を伸ばす。
- 息を吐きながら上半身を倒し、頭を膝に近づけていく。
- 3呼吸ほどキープし、息を吸いながら上半身を起こす。
- 息を吐き切ったら左右を入れ換え、反対側も同様に行う。

膝を頭につけるポーズの効果は次のようである[A12].

- アキレス腱・腓腹筋・ヒラメ筋が伸ばされ、こむら返りを予防する。

(7)ワニのねじりのポーズ

ワニのねじりのポーズを図 A7 に示す。ワニのねじりのポーズの姿勢の仕方は次のようである[A14].

- 仰向けになり、反り腰にならないようおへそを内側に引き入れる。顎を軽く引き、首の後ろを伸ば

す。

- 片膝を曲げ、両手で膝を抱えて胸に引き寄せる。
- 曲げている膝の外側を、膝と反対側の手で持ち、もう一方の手は肩の高さで横に伸ばし、手のひらを床に置く。
- 息を吐きながら肩が床から浮かないところまで、膝を内側に倒す。視線は、横に伸ばしている手の指先に向ける。反対側も同様に行う。

ワニのねじりのポーズの効果は次のようである[A14].

- ウエストの脂肪を取る、骨盤のひずみを修正する、坐骨神経痛を緩和する。



Fig.A7 Pose of twisting gator[A14].

(8)魚のポーズ



Fig.A8 Pose of fish[A16].

魚のポーズを図 A8 に示す。魚のポーズの姿勢の仕方は次のようである[A17].

- 仰向けになり、足をそろえて伸ばす。
- 手のひらを下に向けてお尻の下に入れる。
- 肩甲骨を寄せるように両腕を伸ばしたまま近づける。
- 息を吸いながら胸を天井に向けて持ち上げ、頭頂部が床につくように首を伸ばす。
- 腕で床を押すようにして体を支える。
- ゆっくりと呼吸をし、ポーズをとるときと逆の順番で元の姿勢に戻す。

魚のポーズの効果は次のようである[A16].

・呼吸器トラブルの改善, 血行の改善, 背筋を鍛える, 猫背の矯正, 首・肩・背中をマッサージする.

付録の参考文献

- [A1] 日本ヨガ連盟, “ヨガについて”,
<https://www.npo-yoga.com> (参照日:2024年6月14日)
- [A2] 西川眞知子, “ヨガのすべてがわかる本,” 株式会社マイナビ出版, p.114, 2022.
- [A3] ホットヨガスタジオ LAVA, “「安楽座」は, 安定で快適に”, <https://yoga-lava.com/yogafull/1698/> (参照日:2024年6月15日)
- [A4] 西川眞知子, “ヨガのすべてがわかる本,” 株式会社マイナビ出版, p.168, 2022.
- [A5] オンラインフィットネス torcia, “猫のポーズの効果とやり方を分かりやすく解説!”,
<https://online.tipness.co.jp/magazine/lesson-139/> (参照日:2024年6月15日)
- [A6] 西川眞知子, “ヨガのすべてがわかる本,” 株式会社マイナビ出版, p.162, 2022.
- [A7] ホットヨガスタジオカルド, “自宅でヨガ”,
<https://www.hotyoga-caldo.com/home/pose002.php> (参照日:2024年6月15日)
- [A8] 西川眞知子, “ヨガのすべてがわかる本,” 株式会社マイナビ出版, p.140, 2022.
- [A9] ホットヨガスタジオカルド, “自宅でヨガ”,
<https://www.hotyoga-caldo.com/home/pose026.php> (参照日:2024年6月15日)
- [A10] 西川眞知子, “ヨガのすべてがわかる本,” 株式会社マイナビ出版, p.152, 2022.
- [A11] ヨガジャーナルオンライン, “ヨガポーズ集”,
<https://yogajournal.jp/pose/17> (参照日:2024年6月15日)
- [A12] 西川眞知子, “ヨガのすべてがわかる本,” 株式会社マイナビ出版, p.124, 2022.
- [A13] クラスモール, “頭を膝に付けるポーズの練習方法”,
<https://classmall.jp/blog/genre/yoga/7027/> (参照日:2024年6月15日)
- [A14] 西川眞知子, “ヨガのすべてがわかる本,” 株式会社マイナビ出版, p.220, 2022.
- [A15] ホットヨガスタジオカルド, “自宅でヨガ”,
<https://www.hotyoga-caldo.com/home/pose028.php> (参照日:2024年6月15日)
- [A16] 西川眞知子, “ヨガのすべてがわかる本,” 株式会社マイナビ出版, p.244, 2022.
- [A17] ホットヨガスタジオカルド, “自宅でヨガ”,
<https://www.hotyoga-caldo.com/home/pose016.php> (参照日:2024年6月15日)

姿勢推定を用いた管楽器奏者の演奏前動作検出

渡邊 風太*, 實廣 貴敏*

(2025年9月8日受理)

Detection of Pre-Performance Movements in Wind Instrument Players Using Posture Estimation

Futa WATANABE* and Takatoshi JITSUHIRO*

(Received September 8, 2025)

Abstract

We propose an automatic detection of pre-performance movements in wind instrument players using posture estimation technique. The signal is given when the wind instrument player lowers the bell and then raises it. We employed a pose estimation framework to estimate the posture of holding an instrument, and to derive the angles of both shoulders and both elbows. We conducted classification experiments using four types of machine learning methods: SVM, Random Forest, Gradient Boosting, DNN. Experimental results show that all methods achieved high accuracy, especially, Random Forest and Gradient Boosting performed the best.

キーワード: 管楽器奏者, 動作検出, 姿勢推定, 姿勢動作特徴量, 機械学習

Keywords : wind instrument player, motion detection, posture estimation, posture and movement features, machine learning

1. はじめに

近年, 世界では1人の時間というものが再定義され, その風潮は音楽などにもとりこまれ始めている. 管楽器演奏を一人で楽しみたいが, 伴奏者がいない場合, 音源に合わせて練習することがある. 従来のボタンでの再生方式では, 楽器を片手で保持し, もう片方の手で音源を再生することになる. したがって, 両手で扱う管楽器においてそれはとても困難である. ボタンを足で踏むなどの対処法があるが, それは奏者の自律的な演奏練習にはつながっていないと考える. そこで, 伴奏者と同じように楽器の上下でタイミングをそろえられる方法があれば, 管楽器演奏者の自律的な演奏練習に貢献できるのでないかと考える.

近年, リアルタイムの姿勢検出技術が実現されており, 例えば, 姿勢推定アルゴリズム OpenPose[1]を用い, ある特定の動作をした際に画面上にエフェクトを表示する[2]ことが可能である. 文献[2]では, OpenPose の Tensorflow 版である tf-pose-estimation[3]フレームワークを用いており, 比較的容易に姿勢推定技術を利用できる.

そこで, 本研究では, 姿勢推定技術を用い, 特定

のポーズをした時に, 音楽を再生することで, 最初に述べた演奏練習に利用できる. しかし, 単に座標点を検出するだけでは, その姿勢になっているかを正確に判断することが難しい. そこで, 機械学習をポーズ判定に使用し, 座標点ではなく, 腕の関節の角度を使用することを提案する.

また, 管楽器演奏者の動作は主に上下運動になる為, フレーム単体に着目した際, 上方向に移動しているフレームなのか, 下方向に移動しているフレームなのかを区別するのは困難である. そこで, 前後フレームを時系列データとして同時に特徴量として用いることを提案する. これにより, 各関節の座標の遷移がより鮮明になり誤分類が起きにくくなる.

まとめると, 本研究では, 演奏者の動作を正確に検出するために, 姿勢推定によって取得した座標点を基に, 両肩および両肘の4つの関節角度を算出, これを特徴量として利用する. この関節角度により, 楽器の上下動作を定量的に捉えることが可能となり, 動作分類の精度向上が期待できる. また, それらの角度の前後フレームでの値も同時に利用して識別を行うことで, 精度向上を図る. また, 動作分類には SVM (Support Vector Machine), Random Forest, Gradient

* 愛知工科大学工学部情報メディア学科, 〒443-0047 愛知県蒲郡市西迫町馬乗 50-2
Department of Media Informatics, Aichi University of Technology, 50-2 Manori, Gamagori, Aichi 443-0047, Japan

Boosting, DNN (Deep Neural Network)の4種類の機械学習モデルを採用し、分類精度を比較する。

本論文の構成について述べる。2節では、姿勢推定に用いたフレームワークについて述べる。3節では、検出する合図を表すための提案する特徴量について述べる。また、各種機械学習手法について説明する。4節では、それらの手法による識別実験を行う。5節にて結論をまとめる

2. 姿勢推定技術について

2.1 OpenPose

姿勢推定技術は、人間の骨格や動作を数値データとして扱うことが可能となるため、幅広い分野で利用されている。

OpenPose[1]は、Carnegie Mellon University によって開発されたオープンソースの姿勢推定ライブラリであり、画像や動画から人間の骨格を検出する技術として最も広く利用されているツールの一つである。その最大の特徴は、身体全体の姿勢(全身の骨格構造)、手指の詳細な動き、さらに顔の表情を同時に推定できる点にある。また、1つの画像や動画フレーム内に複数の人物が存在する場合でも、各人物を個別に検出して区別できる複数人数同時検出機能を備えている。

技術の概要を説明する。まず、畳み込みニューラルネットワーク(CNN)を活用して入力画像から関節候補や骨格情報に関連する特徴マップを生成し、特に各関節の位置を表す信頼度マップ(Confidence Maps)と関節間のつながりを示す Part Affinity Fields (PAFs) を出力する。次に、PAFs を基にした Greedy Matching アルゴリズムによって関節間の関連性を解析し、適切な接続を行うことで骨格構造を形成し、これにより、画像中の複数人物の骨格を独立して構築可能としている。そして、マルチスケール処理により、入力画像を複数の解像度で処理して小さな人物や遠くにいる人物を正確に検出し、異なるスケールでの骨格推定結果を統合することで精度を向上させている。このような特徴により、OpenPose はスポーツ解析、リハビリテーション、モーションキャプチャ、ゲーム開発などさまざまな分野で活用されているが、モデルの計算負荷が大きいため、高性能なハードウェアが必要である点が課題として挙げられる。

2.2 tf-pose-estimation

tf-pose-estimation[3]は、TensorFlow を基盤としたオープンソースの姿勢推定フレームワークであり、軽量性とリアルタイム性を重視して設計されている。この技術は OpenPose のアーキテクチャを参考にしつつ、計

Table 1 The differences between tf-pose-estimation and OpenPose.

Tool names	tf-pose-estimation	OpenPose
Back-ends	TensorFlow	Caffe, PyTorch
Model types	Lightweight models (CMU, MobileNet, etc.)	High-precision models
Setup	Easy (Python + TensorFlow)	Complicated (C++ library is required.)
Estimated outputs	Joint coordinates	Joint coordinates + confidence scores, faces, hands
Estimated speed	Faster	Slower
Scalability	Easy to customize	Advanced C++ extensions are required.
Real time	Prioritizing real-time capability	A high-performance GPU is recommended.
Programming language	Python	C++, Python, Unity
Applications	Lightweight pose estimation application	Detailed posture analysis and industrial applications

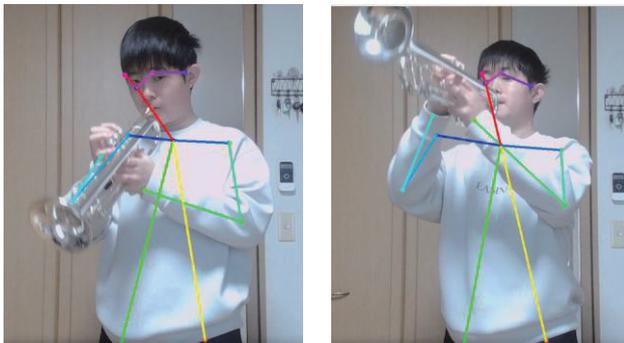
算負荷の低減とモバイル環境での利用を想定した設計が特徴である。表 1 に tf-pose-estimation と OpenPose との比較を示す。次のような技術を組み合わせて骨格推定を実現している。まず、軽量で高性能な ResNet (Residual Network) をバックボーンに採用し、入力画像から関節情報に関連する特徴量を効率的に抽出することで、モデル全体の計算負荷を抑えつつ高精度な推定を可能にしている。また、単一スケール処理を採用しており、OpenPose のマルチスケール処理とは異なり、計算負荷を大幅に削減することでリアルタイム処理性能の向上を実現している。さらに、OpenPose から導入された Part Affinity Fields (PAFs) を活用し、関節間の接続性を解析して骨格構造を構築しているが、この PAFs の計算は OpenPose よりもリアルタイム性に最適化されており、リソース効率が向上している。加えて、TensorFlow エコシステムを活用し、TensorFlow Lite や TensorFlow.js に対応しているため、モバイルデバイスや Web ブラウザ上でのデプロイが容易であり、リソースが限られた環境でも姿勢推定を

実現できる. このような特徴により, tf-pose-estimation はリアルタイム性が求められるシーンやリソースが制限された環境に適しており, 本研究でも Tf-pose-estimation を採用する. 一方で, 精度面では OpenPose にやや劣る場合があり, 大規模な計算リソースが利用可能な場合には OpenPose がより適しているケースも多い.

3. 姿勢推定を用いた管楽器演奏者の演奏開始合図の自動検出

3.1 推定対象のポーズ

本研究の提案手法である, 姿勢推定を用いた管楽器演奏者の演奏開始合図の自動検出方法について説明する. 管楽器演奏者の演奏開始合図を正確に予測するため, 姿勢推定, ラベル付け, 機械学習モデルの学習・評価の三段階で構成される. 図1が本研究で対象とするポーズである, (a)ベルダウンと(b)ベルアップである. 本手法の目的は, 曲冒頭第1拍目の音の2拍前のポーズ(ベルダウン)と, 曲冒頭第1拍目の音の1拍前のポーズ(ベルアップ)を検出し, 楽曲冒頭の1拍目を予測することである.



(a) Bell down (b) Bell up
Fig. 1 Pose examples of Bell down and Bell up.

姿勢推定フレームワークとして, tf-pose-estimation を使用する. OpenPose よりもリアルタイム性に重きを置いた設計になっており, 本研究に適している. リアルタイムで推定した両肩, 両肘等の座標データを用いて, 各関節の角度を算出する. 角度の算出には次式を使用し, 算出された角度を本手法の特徴量として扱う.

$$\theta = \arccos \left(\frac{a + b - c}{\sqrt{4 \cdot a \cdot b}} \right) \cdot \frac{180}{\pi} \quad (1)$$

ここで a, b, c はそれぞれ次のように定義される.

a : 点 P_0 と点 P_1 の間の距離の二乗:

$$a = (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2$$

b : 点 P_1 と点 P_2 の間の距離の二乗:

$$b = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

c : 点 P_0 と点 P_2 の間の距離の二乗:

$$c = (x_2 - x_0)^2 + (y_2 - y_0)^2$$

これにより, 3 点 P_0, P_1, P_2 間の角度を計算することが可能となる. ラベル付けでは, 検出された座標データから(1)式で算出された角度データ(両肩, 両肘)を基に行う. 一般的に, 管楽器演奏者の演奏開始合図には 4 拍子でいう 3 拍目のタイミングでベルダウン(楽器のベル部分を下げる動作)を行い, 4 拍目でベルアップ(ベル部分を上げる動作)を行う. 本研究では, 3, 4 拍目のタイミングを示すポーズを以下のように分類してラベル付けを行った.

- ・ラベル「1」: ベルダウン(3 拍目)
- ・ラベル「2」: ベルアップ(4 拍目)
- ・ラベル「0」: その他のポーズ

ベルダウン, ベルアップの動作開始から終了までのフレームに該当するラベル番号を付け, その他のフレームには, その他のポーズとして「0」を付与した. ラベル付けの際には, 1 フレームごとのラベル付けでは変化が微小であるため, 2~3 フレームごとにラベルを付与することで, データの変動を学習しやすくすると考え, フレームを決められた個数分飛ばしてラベルを付けるフレームスキップ機能も実装した. また, 識別対象は動作であり, データが時系列となるため, フレームごとの認識では, どの動作の途中であるか特定できず, 十分な精度を得ることが難しい. そこで, 前後フレームを数フレーム分, 合わせて特徴量とした. 図2に示すように, 時系列データとして認識対象フレームの前後1フレームも連結して, 3 フレーム分の特徴量を一つの入力していくと, 通常時からベルダウンへ遷移(中央から下にベルが移動)しているフレームデータとベルダウンからベルアップへ遷移(下から上にベルが移動)しているフレームデータがほぼ同一となってしまう, 区別がつかなくなる. 前後データを付与することでポーズの変化を明確に仕分けることができ, より優れたポーズ推定が可能になる. 具体的には, 認識対象フレームの前後に固定数のフレームデータを付与することとし, 前後フレーム数が 0~5 であるとき, それぞれの精度を評価する.

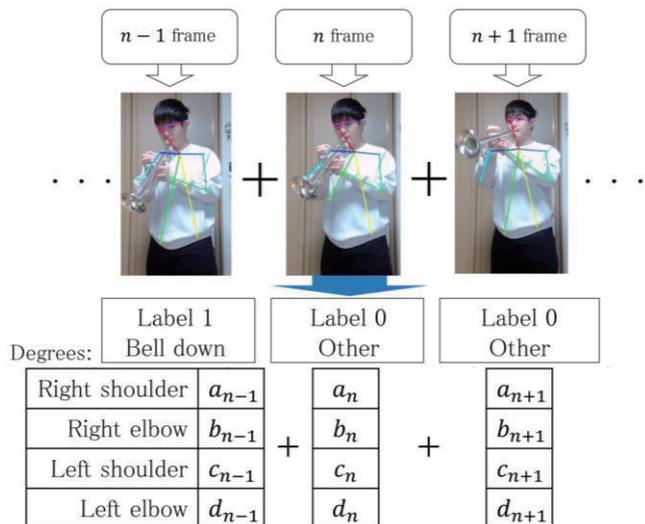


Fig. 2 Input features containing characteristics from multiple frames.

3.2 比較する機械学習手法

機械学習手法の学習・評価では特徴量として抽出した4つの関節角度(両肩, 両肘)を用いる. 使用した手法は以下の4種類である.

- (1) Support Vector Machine (SVM)[4]: 非線形分類性能に優れたモデルであり, 初歩的な分類手法として特徴量の有効性を検証する.
- (2) Random Forest[5]: 複数の決定木を活用した手法で分類性能を比較する.
- (3) Gradient Boosting[6]: 特徴間の相関を考慮した高精度分類手法の評価.
- (4) Deep Neural Network (DNN)[7]: 深層学習により, さらに高度な分類精度を目指す.

各モデルの学習には, ラベル付きデータの8割を学習データ, 2割を評価データとして使用する. また, 管楽器奏者の動画データの特性上, 推定対象のポーズはごく一部であるため, ラベル0が多く, ラベル1, 2が少なくなってしまう. よってラベル間のデータバランスを考慮し, 不均衡なデータに対して SMOTE (Synthetic Minority Oversampling Technique)[8]を適用する. SMOTE とは少数ラベルのデータ点においてその近くに存在する他の少数ラベルのデータ点を探索し, 探索された中からランダムに1つの近傍点を選択する. この選ばれた近傍点と元のデータ点の間に直線を引き, その直線上のランダムな位置を選んで, 新しいデータ点を生成するデータの偏りを無くす手法である. これにより, データが不足しているラベルを補完し, バランスが取れた学習が可能となる.

4. 各機械学習手法での評価

本節では, 4つの機械学習モデル(SVM, Random Forest, Gradient Boosting, DNN)を使用し, それぞれに時系列データの付与で評価がどのように変化するかを求め, 最適な手法を検討する.

4.1 前提実験条件

各機械学習モデル実験に共通する実験条件を述べる. 1名によるベルダウン, ベルアップを含んだ学習データ1065フレーム, 評価データ265フレームを用いた. ベルダウンは38回, ベルアップは38回, その他は198回含まれている. 各機械学習モデルに入力する特徴量は動画の各フレームから抽出された関節角度(L1, L2, R1, R2)を使用. L1は左肩, L2は左肘, R1は右肩, R2は右肘の角度であり, これらの角度は三角関数(1)式を用いて算出し, 関節位置の検出には tf-pose-estimation ライブラリを使用する.

また, 時系列データとして, 現在のフレームを中心に前後のフレームを含めた特徴量を作成した. このコンテキストフレーム数は1~5の範囲で設定し, 各フレームの特徴量を時系列データとして扱った. データの前処理では, まず特徴量のスケールを統一するため, sklearn.preprocessing.StandardScaler を用いて標準化を行った. さらに, ラベル間のデータ量の偏りを解消するために SMOTE を使用し, 少数ラベルのデータを合成してバランスを調整した.

4.2 SVM による実験および評価

SVMモデルでは, カーネルにRBF(Radial Basis Function)を使用した. ハイパーパラメータとしては, 正則化パラメータCを10とした.

図3にフレーム数に対するAccuracyとF1スコアを示す. ラベルにより, 傾向が異なるが, 全体としては, 前後フレーム数が多いほど, 精度が上がるといえる.

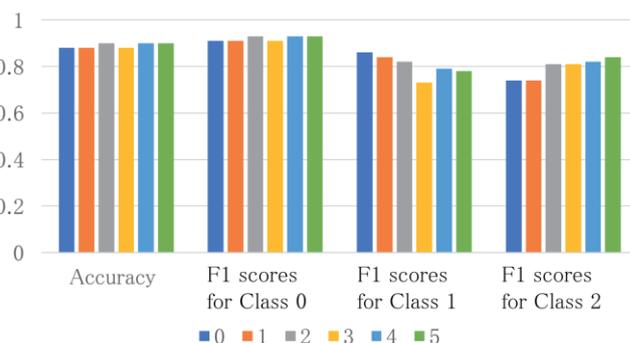


Fig. 3 Accuracy and F1 Scores for the number of frames by SVM.

4.3 Random Forest による実験および評価

Random Forest は複数の決定木を組み合わせることで高い汎化性能を実現するアルゴリズムである。各決定木が独立して学習を行い、その結果を多数決などで統合することにより、過学習を抑制しつつモデルの精度を向上させることが可能である。また、本アルゴリズムは特徴量の重要度を計算する能力を有しており、モデルの解釈性を向上させる点でも優れている。決定木の数を 300、最大深度を 20 として実験を行った。

図 4 に結果を示す。Accuracy, F1 スコアとも高い値を示している。また、フレーム数が多いほど精度が高くなるのがわかる。

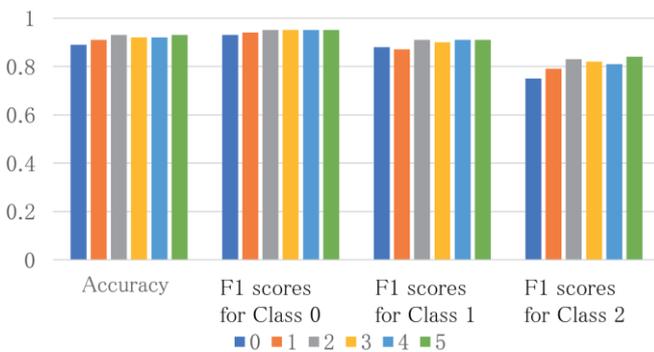


Fig. 4 Accuracy and F1 scores for the number of frames by Random Forest.

4.4 Gradient Boosting での実験および評価

Gradient Boosting では、複数の弱学習器（一般的には決定木）を順次構築し、誤差を修正することでモデル全体の性能を向上させる。このアルゴリズムは、各学習器が前のモデルの誤差を学習する仕組みに基づき、学習を繰り返すことで高い精度を達成することを目的としている。本研究においては、弱学習器として深さが制限された決定木を使用し、学習率を適切に調整することで、過学習を防ぎつつモデルの汎化性能を向上させるよう設計している。また、決定木の数を適切に設定することで、モデルの複雑さと計算コストのバランスを図っている。Gradient Boosting は、データの分布に柔軟に対応できる点で優れており、非線形な関係性を含むデータにも効果的である。決定木の数を 200、学習率を 0.05、最大深度を 5 に設定した。

図 5 にフレーム数に対する Accuracy と F1 スコアを示す。多少のばらつきは見られるが、全体としては、フレーム数が多いほど、精度が高い。

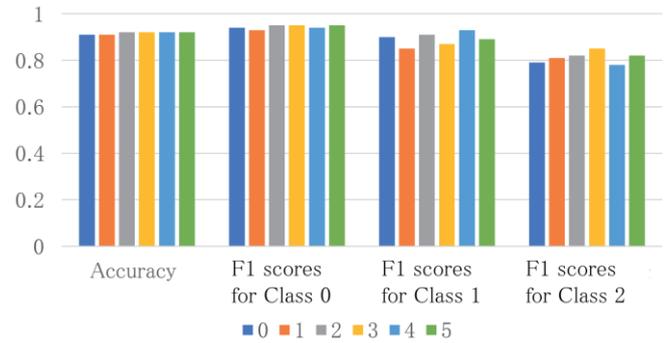


Fig. 5 Accuracy and F1 scores for the number of frames by Gradient Boosting.

4.5 Deep Neural Network での実験および評価

ディープニューラルネットワーク (Deep Neural Network, DNN) は、分類問題や回帰問題において広く使用される教師あり学習アルゴリズムであり、多層のニューラルネットワークを通じてデータを学習するのが特徴である。本研究では、複数の全結合層 (Fully Connected Layers) を持つ DNN を用いて学習を行っている。このアルゴリズムは、層ごとに学習された特徴を次の層に渡すことで、データの複雑なパターンを効率的に学習できる点で優れている。

本研究においては、入力層の後に複数の隠れ層を配置し、各層において ReLU (Rectified Linear Unit) 活性化関数を用いて非線形性を導入している。また、ドロップアウト (Dropout) を使用してランダムに一部のニューロンを無効化し、過学習を防止する工夫を行っている。出力層には、分類タスクに応じたラベル数を持つユニットを配置し、ソフトマックス (Softmax) 関数を使用して確率分布を出力するよう設計している。

DNN の学習には、Adam オプティマイザを使用し、学習率やバッチサイズを調整することでモデルの収束を促進している。さらに、Early Stopping を適用し、検証データの性能が一定回数改善しなくなった時点で学習を停止することで、モデルの汎化性能を確保している。DNN は、複雑な非線形関係を学習する能力に優れており、高次元かつ多様なデータに対して効果的である。

モデル構造は入力層に続く全結合層 (256 ユニット, ReLU 活性化関数), ドロップアウト (50%), その後さらに全結合層 (128 ユニット, ReLU 活性化関数), 再度ドロップアウト (50%), 出力層にはラベル数に対応するユニット数を持つソフトマックス活性化関数を設定した。最適化アルゴリズムとして Adam を用い、損失関数にはクロスエントロピーを採用した。訓練時には Early

Stopping を利用し、検証データの損失が 5 エポック連続で悪化した場合に訓練を終了するよう設定した。

図 6 に DNN による、フレーム数に対する Accuracy と F1 スコアを示す。クラス 1, クラス 2 では、フレーム数に対するばらつきが大きく、前後フレーム数が 3 のとき、または、5 のときがよい。全体的には、Accuracy を見ると、フレーム数 3, または、5 のときが最も精度が高い。

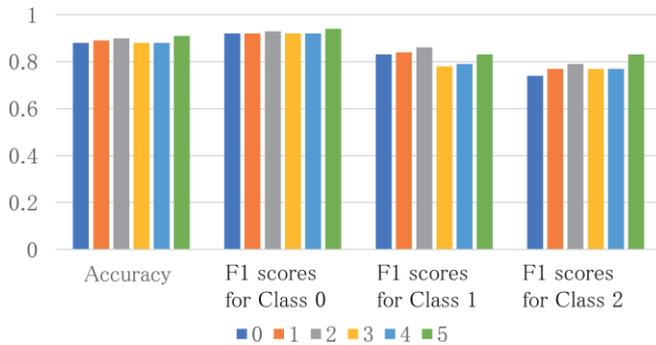


Fig. 6 Accuracy and F1 scores for the number of frames by Deep Neural Network.

4.6 各手法の比較

SVM, Random Forest, Gradient Boosting, Deep Neural Network の各モデルの管楽器演奏者の演奏開始前合図（ベルアップ、ベルダウン）の検出に対する Accuracy を図 7 に、わかりやすいように、スケールを大きくして示している。各モデルによる値が 0.88~0.92 の範囲であり、いずれも高い性能を示している。特に、Random Forest や Gradient Boosting において、Accuracy が高いことがわかる。全体的にフレーム数が多い方が高い。

また、ここまでの結果を振り返ると、全モデルに共通して見られた傾向として、ラベル 0（動作途中の姿勢）の分類が最も安定しており、他のラベルと比較して誤分類が少ない。混同行列で調べると、ラベル 1, 2 がラベル 0 との誤分類が一番多くみられ、これはラベル 1, 2 の動作がラベル 0 の動作との境があいまいであるからだと推測できる。各モデルの性能を比較すると、Random Forest と Gradient Boosting は特にラベル 0 において高い精度を示し、再現率および F1 スコアにおいても非常に高い水準で安定していた。また、これらのアンサンブル学習モデルは、ラベル 1（ベルアップ）およびラベル 2（ベルダウン）についても時系列が進むにつれて性能が向上し、フレーム数が 5 においては最も高い精度を示した。一方で、Deep Neural Network は、特に、入力するフレーム数が多くなると精度が向上する特性を持つことが確認され

た。ただ、Random Forest や Gradient Boosting と比較すると、精度が低く、フレーム数によって精度が変わる。また、SVM モデルは全体的にバランスが良く、全フレームにおいて高い精度を維持し、特にラベル 0 に対しては非常に安定した分類性能を示した。ラベル 1 およびラベル 2 においても、フレームの進展に伴い誤分類が減少し、高い識別能力を示している。ただし、精度としては、他のモデルと比べると、やや低い結果となった。

このことから、時系列データを用いた演奏前動作分類において、入力特徴量を対象とするフレームだけでなく、その前後のフレームいくつかをまとめたものを特徴量とすることで、全てのモデルが効果的に動作の特徴を捉え、高精度な分類を実現できていると評価できる。また、各モデルの特性を適切に活用することで、特定の動作やデータセットの特性に応じた最適な分類性能を引き出すことが可能であると考えられる。特に、Random Forest と Gradient Boosting は、高い安定性と汎化能力を備えたアンサンブル学習の利点を活かしていると考えられる。総じて、本研究で検討した 4 つのモデルは、時系列データに基づく動作分類タスクにおいて非常に高い性能を示し、それぞれのモデルが持つ独自の強みを活かすことで、多様な動作パターンに対する精度の高い識別が可能であることが示された。これらの結果は、異なるモデルを組み合わせることで、さらに高い分類性能や汎化能力が期待できることを示唆しており、今後の研究や実用的な応用に向けて重要な知見を提供するものである。

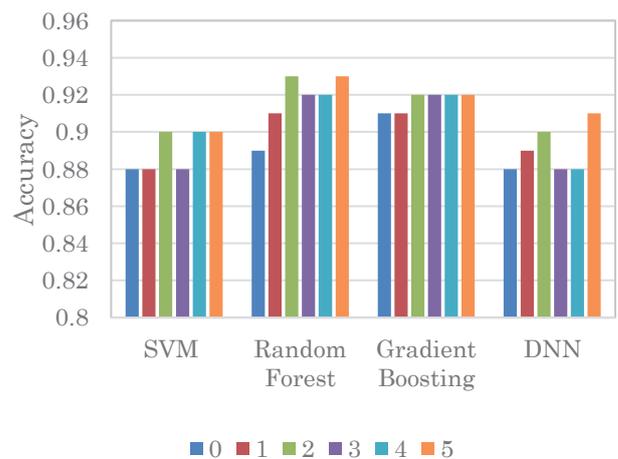


Fig. 7 Evaluation of the four methods for the number of frames.

5. おわりに

本研究では、姿勢推定技術を用いた管楽器演奏者の演奏前の合図の自動検出方法を提案し、評価を行った。管楽器奏者がベルダウンしてからベルアップするときを合図とする。

まず、演奏時の楽器を持っている姿勢を推定するために、軽量なモデルでリアルタイム性を重視している tf-pose-estimation 姿勢推定フレームワークを用いた。検出された両肩、両肘等の座標から、両肩、両肘の角度を推定し、特徴量とする。画像の各フレームに、ベルダウン(ラベル 1)、ベルアップ(ラベル 2)、それ以外の姿勢(ラベル 0)のラベルを付けて、機械学習手法により、学習させる。ただし、識別対象は動作であり、データが時系列となるため、1 フレームごとの認識では、どの動作の途中であるか特定できず、十分な精度が得られない。そこで、前後フレームを数フレーム分、合わせて特徴量とした。今回の検討では、前後フレーム数を 0~5 まで変化させて、評価を行った。

機械学習手法としては、SVM (Support Vector Machine)、Random Forest、Gradient Boosting、DNN (Deep Neural Network) の 4 つのモデルを用いて評価を行った。どの手法も比較的高い精度を得ることができた。前後フレーム数が増えることで、精度向上が見られた。時系列データであるので、特徴量の前後関係をより長く知っている方が、推定しやすいと考えられる。

この 4 つの手法の中では、Random Forest と Gradient Boosting が安定的に最も高い精度を得ることができた。アンサンブル学習の利点を生かしているといえる。ただし、現在、主流の技術となっている DNN では、特に、この 10 数年で発展し続けており、様々なパターン認識では人間の能力を超える結果も出ている。学習データ量を増やす必要はあるが、より複雑な DNN 技術を使い、精度向上を図る必要がある。

また、演奏前動作のラベル分類は自然とラベル 0 (ベルアップ、ベルダウン以外の姿勢)が多くなってしまふ。そこで今回 SMOTE をデータの均衡を保つために実装したが、結果ではやはりラベル 0 の精度が良いモデルが多く、最も検出したいラベル 1、2 の検出が劣ってしまうことが多かった。しかし、ラベル 1、2 の精度も時系列データの付与により 9 割を超えることもある為、十分実用に耐えうる結果だといえる。

今後の課題としては、複数の被験者に対する評価、ラベル間でのサンプル量の均衡を保つ方法の検討、各動作の区切り方法の検討、学習データ量の増加、さらなる機械学習モデル上の工夫などが挙げられる。

参考文献

- [1] Z. Cao, G.H. Martinez, T. Simon, S. Wei, Y.A. Sheikh, "OpenPose: Realtime multi-person 2D pose estimation using part affinity fields," IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, vol.43, no.1, pp.172-186, 2019.
- [2] "OpenPose を使ってかめはめ波を撃ってみた" (参照日:2025年9月3日, https://qiita.com/oka_1207/items/ec5010d4ed53a185c175)
- [3] tf-pose-estimation, (参照日:2025年9月3日, <https://github.com/gsethi2409/tf-pose-estimation>)
- [4] V.N. Vapnik, "Statistical Learning Theory," Wiley, New York, 1998.
- [5] L. Breiman, "Random Forests," Machine Learning 45, pp.5-32, 2001.
- [6] J.H. Friedman, "Greedy Function Approximation: A Gradient Boosting Machine." Annals of Statistics, 29(5), pp.1189-1232, 2001.
- [7] A. Krizhevsky, I. Sutskever, G.E. Hinton, "ImageNet Classification with Deep Convolutional Neural Networks," Advances in Neural Information Processing Systems (NeurIPS), 25, 2012.
- [8] N.V. Chawla, K.W. Bowyer, L.O. Hall, W.P. Kegelmeyer, "SMOTE: Synthetic Minority Over-sampling Technique," Journal of Artificial Intelligence Research, vol.16, pp.321-357, 2002.

研究論文

ヘッドフォン型 3D 聴覚ディスプレイの製作と性能評価

深谷 拓也*, 山高 正烈*

(2025年9月2日受理)

Development and performance evaluation of a headphone-based 3D auditory display

Takuya FUKAYA* and Masahiro YAMATAKA*

(Received September 2, 2025)

Abstract

In this study, we developed a headphone-based three-dimensional virtual auditory display (VAD) and evaluated its performance through two experiments. In Experiment 1, we compared the proposed VAD with a conventional binaural VAD regarding sound localization accuracy. The results demonstrated that the proposed VAD achieved higher localization accuracy than the conventional method and that its performance was not affected by the recording position of the stimuli. In Experiment 2, we examined the effect of visual information on localization accuracy in a virtual reality (VR) environment. The results showed that the proposed VAD provided superior localization accuracy compared with a panning-based method, particularly at wider azimuth angles. Moreover, the system maintained stable localization performance even under audio-visual mismatch conditions, indicating its effectiveness as a spatial audio presentation technique for multimodal VR content.

キーワード: 聴覚ディスプレイ, 頭部伝達関数, 音像定位, バーチャルリアリティ

Keywords : Virtual auditory display, HRTF, Sound localization, VR

1. はじめに

1876年代以降, 3D 立体音響技術に関する研究は多岐に渡って進められており, 現在もなお多くの製品開発が盛んに行われつつある. 初期のステレオ音響システム[1]の実現から始まり, ダミーヘッドを用いたバイノーラル録音の登場[2], 1950年代には頭部や耳の形状が音の方向感覚に与える影響を考慮した頭部伝達関数(HRTF[3])の概念による音響シミュレーションの基盤が築かれ, 今日の立体音響[4]分野の発展につながった. 同時に, 人の聴覚知覚メカニズムの解明に関する研究も盛んに行われ, 3D 立体音響技術は近年のバーチャルリアリティ(VR)分野において, 臨場感や没入感等の高次感性知覚向上の手段として注目されつつある.

3D立体音響技術は, 映画館やゲームコンテンツにおける効果音を含むエンターテインメント分野においても数多く利用されている. 一般的に知られているものとして, ドルビーアトモス[5]のようなオブジェクトベースの音響システムが挙げられる. その中で, 音に空間的な情

報を付与して提示することができるシステムとして 3次元聴覚ディスプレイ(以降VAD[6])があり, 特にVRコンテンツにおいてユーザの没入感を高めるために非常に重要な役割を果たしている. 例えば, VRシステム向けの音響ガイドや, ゲームコンテンツにおいて周囲の状況を迅速に把握するために, 視覚情報では提示できない空間情報を音から判別する必要がある状況下において, 音像定位の高精度化への需要が高まっている. しかし, 従来の聴覚ディスプレイに関する研究は, 通信システムの低遅延評価[7]や音刺激単体による評価が中心であり, VR環境におけるユーザの没入感を高めるために想定したマルチモーダルな環境下での性能評価は十分に行われていない.

音空間の最適再生方法について調査された従来研究[8]では, モノフォニック再生方式, 2種類のステレオ再生方式(CardiodとFigure-of-Eight), バイノーラル再生方式といった4種類の再生方式を用い, 最適再生方法の検討が行われた. そこでは音の方向知覚に関しての評価が行われ, その結果, モノフォニック再生方式の評価が最も低く, バイノーラル再生方式の評価が他の再生方式と比べて高いことが示された. とこ

* 愛知工科大学工学部情報メディア学科, 〒443-0047 愛知県蒲郡市西迫町馬乗 50-2

Department of Media Informatics, Aichi University of Technology, 50-2 Manori, Gamagori 443-0047, Japan

るで、人の空間知覚は視覚情報の影響を強く受けるため、腹話術効果[9]のように音の位置を誤って認識することがある。特にVR環境では、視聴覚刺激を同時に提示する場面が多く、視覚刺激が音の定位精度に与える影響を考慮する必要がある。したがって、視覚刺激の提示位置と聴覚空間知覚との関係性を調査し、視覚刺激の影響を考慮に入れた聴覚ディスプレイの設計と評価が求められる。

本研究では、ヘッドフォン型 VAD を自作してその音像定位性能を調査するとともに、VR 環境での使用を想定して、視聴覚刺激の同時提示が VAD の音像定位精度に及ぼす影響を調べた。実験は計 2 つ実施した。実験 1 では、自作 VAD と従来型バイノーラル聴覚ディスプレイの音像定位精度を比較し、実験 2 では、頭部や耳の形を考慮しないパンニングディスプレイ[10]を比較対象とし、視覚オブジェクトの提示位置が VAD の音像定位精度に及ぼす影響を検討した。

2. ヘッドフォン型聴覚ディスプレイの製作

VAD は様々なものが挙げられるが、各研究機関にて独自開発されているものがほとんどであり、一般的に市販されているものはない。そこで、HRTF の切り替えが任意に行えるヘッドフォン型 VAD を製作した。

製作した VAD の概要を以下に記す。Python による VAD 製作においては、音声ファイルに指定角度の HRTF を畳み込み、空間音響効果を再現したステレオ音声ファイルを生成する処理を行った。具体的には、

(1) SAMRAI[11] の HRTF が保存されている SOFA[12]形式のファイルを読み込み、HRTF データと音源の位置データを取得する。

(2) 指定した角度に基づき HRTF データの補間処理を行い、左右耳の伝達関数を計算する。HRTF データの補間は、線形補間法[13]を用いて指定角度の HRTF を近似的に計算した。

(3) 入力音声に対して取得された左右の HRTF データの畳み込み処理を行い、空間音響効果を付加したステレオ音声を生成する。

(4) ステレオ音声をファイルに出力して保存する。

3. 実験 1(自作 VAD の性能評価)

3.1 目的

実験 1 では、製作したヘッドフォン型 VAD の性能評価を目的に、従来のバイノーラル方式との音像定位精度を比較した。

3.2 実験刺激の収録

実験は、ヘッドフォンにて聴取者に 2 s のピンクノイ

ズを提示し、音が聞こえたと感じた方向について回答を求めた。

収録配置図を Fig.1 に記す。ピンクノイズは、Fig.2 に示す通り AmbisonicsVR マイクで収録した。収録は、愛知工科大学体育館にて行われた。使用された機材を以下に示す。

- ・ マイクロフォン (AMBEO VR MIC, SENHEISER)
- ・ スピーカ (400-SP068, サンワサプライ)
- ・ レコーダ (MixPre-6, SOUNDDEVICES)
- ・ ノート PC (Inspiron13 5000Series, DELL)

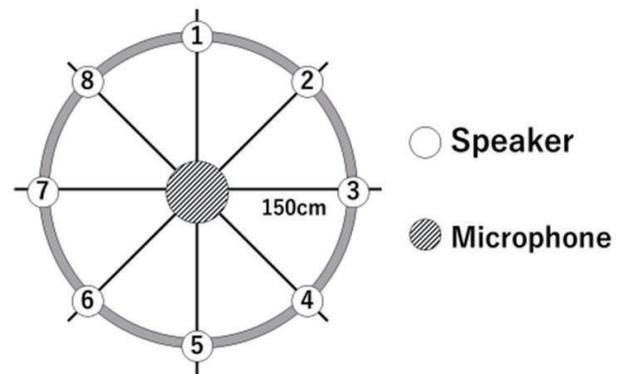


Fig.1 Recording arrangement diagram.



Fig.2 AMBEO VR MIC.

実験刺激は、Fig.1 に示す通りスピーカから 10 s 程度のピンクノイズを再生し、Ambisonics[14]の AmbiX 音源を収録した。スピーカは、マイクロフォンを中心として半径 150 cm、設置角度はマイクロフォンの正面を 0 度として、45 度、90 度、135 度、180 度、225 度、270 度、315 度の位置に順次移動させながら音刺激を再生した。収録した AmbiX 音源は、音源 2 種類 × 音源位置 8 方向で、合計 16 音源となる。なお、AmbiX 音源とは、Ambisonics の B-Format のひとつで、W (無指向成分), Y (左右の広がり成分), Z (上下の広がり成分), X (前後の広がり成分) の 4 つのチャンネルからなる音源収録方式である[8]。



Fig. 3 Experiment situation.

3.3 実験用音刺激の作成

実験用音刺激は、収録音源をそれぞれ 2 s の長さにかットし、バイノーラルディスプレイと自作 VAD を用いて以下に記す通り実験用音刺激を作成した。

- バイノーラル変換

AmbiHead ソフトウェア[15]を使用し、AmbiX 音源に SAMRAI の HRTF を畳み込んで作成した。試行回数は音源位置を 0 度から 360 度までの 45 度刻みとした 8 条件とした。

- 自作 VAD 全方向変換

収録した AmbiX 音源の W (無指向成分) を用いて自作 VAD で HRTF を切り替え、角度を収録時の音源位置 8 方向にそれぞれ合わせて変換して作成した。バイノーラル変換条件と同様に 8 条件とした。

- 自作 VAD 前方方向固定

収録した AmbiX 音源の W (無指向成分) を用いて収録時の音源位置 0 度の音源のみを使用し、自作 VAD で HRTF を切り替え 8 方向の音源を作成した。この時、角度 0 度の音源は、前述の全方向の収録音源を使用した際に作成済みのため条件から外し、7 条件とした。

実験条件は、前述の全 23 条件 (バイノーラル変換 8 条件 + 自作 VAD 全方向変換 8 条件 + 自作 VAD 前方方向固定 7 条件) とした。なお、各条件を 3 回ずつ実施したため、総試行回数は 69 回 (23 条件 × 3) となった。実験参加者のタスクは、耳介密閉型ヘッドフォンを装着した状態でランダムに再生される音刺激を聴取し、音の提示方向を回答することであった。回答は提示方向を示す正面を基準とする番号 1 ~ 7 から、キーボードの数字入力を用いて行った。

実験の様子を Fig.3 に示す。実験は愛知工科大学山高研究室にて実施され、正常な聴力を有する 21 ~ 22 歳の男女 12 名が参加した。音の提示にはオーディ

オインターフェース (Roland, UA 25EX) と、耳介密閉型ヘッドフォン (SENNHEISER, HDA200) を使用した。音刺激提示は、実験参加者間で同じ順番にならないよう、ランダム順に再生されるように設定した。使用音源はラウドネスレベルに差異が生じないようにヘッドフォンの中心にてラウドネスレベルを合わせた。具体的には騒音計 (NL-42, RION) を用いて、各実験用音刺激の時間平均ラウドネス[16] を測定し、すべての音源で 65 ± 3 dB となるように調節を行った。

3.4 実験結果と考察

実験結果を Fig.4 ~ 6 に示す。横軸は音の提示角度、縦軸は実験参加者の回答角度を示しており、円の大きさは回答数を表している。Fig.4 はバイノーラル方式、Fig.5 は自作 VAD の全収録方向音源を使用して変換したもの、Fig.6 は正面の音源のみを用いて変換したものである。

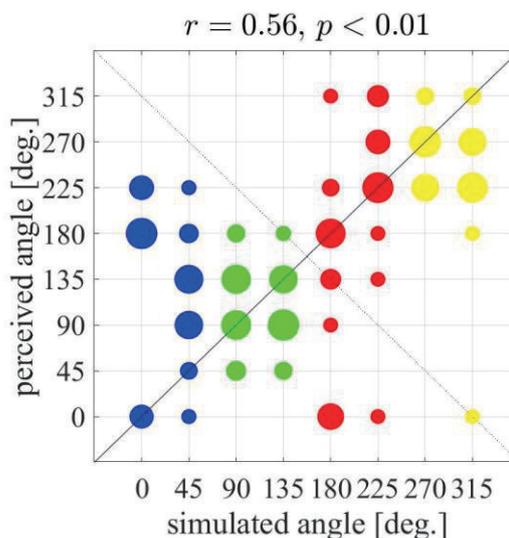


Fig.4 Sound localization results (binaural method).

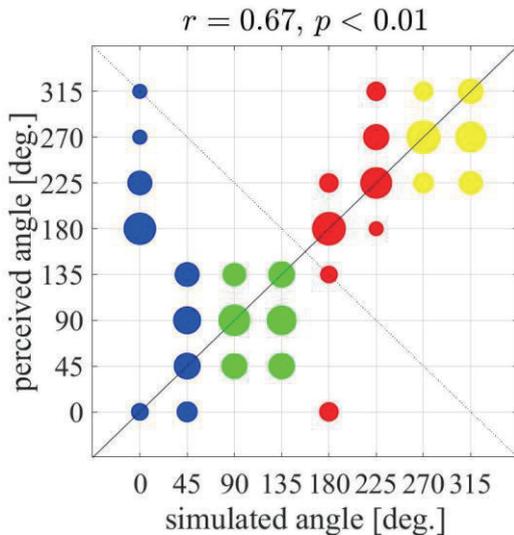


Fig.5 Sound localization results (VAD in all directions).

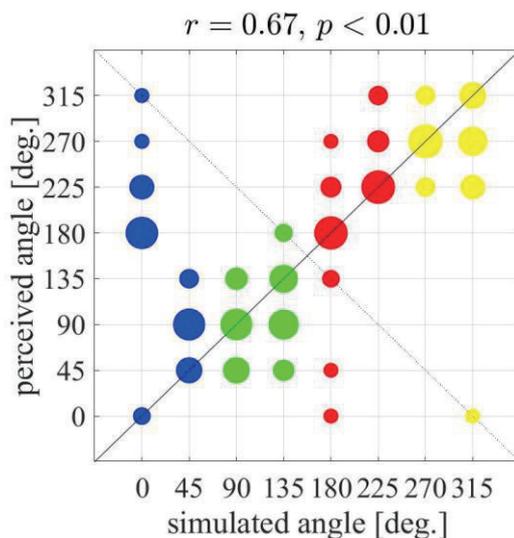


Fig.6 Sound localization results (VAD in forward direction fixed).

実験結果から、どの条件においても、共通して 0 度と 180 度で前後誤りが起こりやすいことが示されており、前後誤りを除くと、すべての条件において音像定位精度が比較的高いことが確認できる。バイノーラル方式 (Fig.4) と自作 VAD の 2 条件 (Fig.5 と Fig.6) を比較すると、提示角度 45 度と 225 度では自作 VAD のほうが音像定位精度が安定していることが読み取れる。即ち、自作 VAD は従来のバイノーラル方式よりも音像定位精度が高いと言える。また、自作 VAD の 2 条件の結果は類似しており、音像定位性能は収録位置に依存せず、HRTF を切り替えるだけでも十分な音像定位精度を有することが言えよう。

4 実験 2 (視聴覚併存下の VAD の性能評価)

4.1 目的

実験 2 では、視聴覚併存下における自作 VAD の音像定位精度を調べるとともに、実験 1 との比較を行い、視覚刺激の提示と音像定位精度との関係を明らかにすることを目的とする。本実験では、比較対象としてパンニングディスプレイ方式を採用した。

4.2 実験内容

音刺激は以下の 2 条件とした。

- ・ パンニングディスプレイ: 角度ごとに左右の音圧レベルを調節して作成。
- ・ 自作 VAD: HRTF を切り替えて作成。

実験は、VR 環境での使用を想定して UnityVR にて実施した。視覚オブジェクトは、正面 0 度 (中心視) および右方向 30 度 (有効視野範囲内) の 2 条件とした。音刺激は、正面 0 度を基準とした 15 度間隔の 7 箇所からランダムに提示した。提示する奥行位置は、聴取位置から 1 m に設定した。回答は、実験 1 と同様に、音が聞こえ方向について音刺激の提示位置と合わせた 7 方向から口頭で求めた。試行回数は (聴覚ディスプレイ 2 種類 × 視覚提示角度 2 種類 × 音源方向 7 種類 = 28 試行) の組み合わせとなり、各条件をランダム順に 3 回ずつ繰り返した。

視覚刺激の提示にはヘッドマウントディスプレイ (以降 HMD) として VR ヘッドセット (MetaQuest2)、音の提示には HMD の装着を考慮してカナル型イヤフォンを使用した。音刺激は実験 1 と同様に、騒音計を用いて各実験刺激の時間平均ラウドネス [16] をすべての音源で 65 ± 3 dB となるように調節した。

4.3 実験結果と考察

実験結果を Fig.7~8 に示す。横軸は音刺激の提示角度、縦軸は平均回答角度を示す。また、正しい角度の組み合わせを理想平均線として点線で示している。

実験結果、視覚オブジェクトが 0 度の場合 (Fig.7)、自作 VAD 方式が全体的に提示角度に近い回答を示し音像定位精度が優れていることが読み取れる。特に、0~75 度の範囲では、VAD の音像定位精度が比較的高く、HRTF による空間再現力が有効に作用していることが考えられる。一方、パンニング方式では、30~60 度にかけて音像定位精度にズレが生じた。また、両方式とも 90 度方向 (側面) においては理想線からの乖離が大きく、視覚オブジェクトの方向に定位が引っ張ら

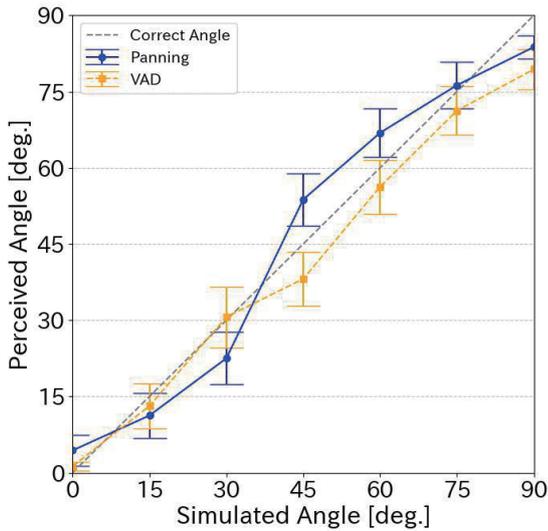


Fig.7 Sound localization results.
(Visual object 0 degree condition)

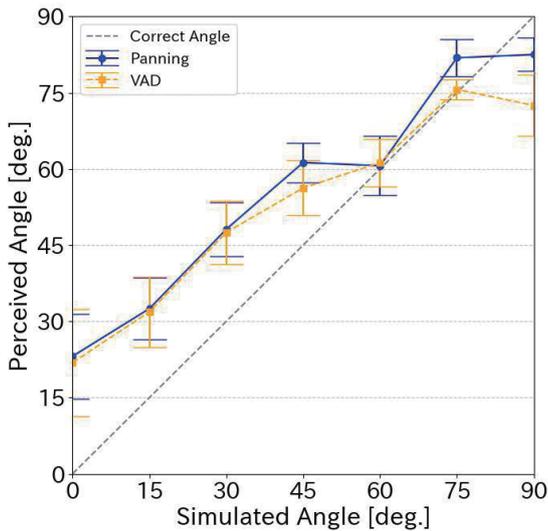


Fig.8 Sound localization results.
(Visual object 30 degree condition)

れていることが読み取れる。この乖離の度合いは自作 VAD 方式の方がより大きく、HRTF ベースの VAD 方式では側面の定位がむしろ難しくなる可能性が考えられる。HRTF による音像定位の手がかりは主に ILD と ITD[17]であり、これらは 90 度付近で急激に変化する。今回の自作 VAD には SAMRAI の HRTF を使用しており、HRTF の正確さや個人適合性が高くない場合にこの急激な変化が逆に不安定な音像定位につながると思われる。また、90 度付近では、耳の後ろにかかる音や耳介のリフレクション効果が強く影響し、HRTF の個人差の影響が最も出やすい可能性も考えられる。

一方、パンニング方式において 90 度の位置に音を振った場合、片方のチャンネルからしか音が出ない極端な信号となるため「明確に片側から聞こえる」といった感覚が生まれやすくなったと考えられる。

視覚オブジェクト 30 度条件 (Fig.8) では、全体的に音像定位が提示角度より右方向にシフトした。この音像定位のシフト現象は視覚オブジェクトの提示位置による影響と考えられ、0~45 度の範囲でその影響が顕著に現れ、60 度以上では視聴覚統合による影響が解除される傾向が見て取れる。また、パンニング方式では 45~75 度の領域において提示角度を過大に評価する傾向が強く、視覚刺激の不一致がある条件では音像定位精度が不安定になることが考えられる。

一方、自作 VAD 条件では視覚刺激の提示位置にかかわらず比較的安定した方向知覚が得られており、視聴覚情報が一致しない条件でも頑健な音像定位性能を維持していることが示された。更に、視覚刺激の提示位置と離れている空間 (60 度以上) においては視覚刺激の影響を受けにくく、音像定位精度が比較的高いことが分かった。この傾向は自作 VAD 方式において顕著に現れ、提示角度 60 度と 75 度の場合に高い音像定位精度が得られた。ただし、Fig.5 と Fig.6 に示す視覚オブジェクトの提示位置 0 度条件の場合と同様に、音刺激の提示角度 90 度の場合にはパンニング方式より音像定位精度が低いことが示された。

5. まとめ

本研究では、VAD を製作しその音像定位性能を評価した後、VR 環境下において視覚刺激の提示が自作 VAD の音像定位精度に及ぼす影響を実験的に検証した。その結果、自作 VAD は音の収録位置に依らず高い音像定位性能を有し、それは VR 環境下においても広角度にわたってパンニング方式よりも優れた音像定位精度を示した。また、自作 VAD の音像定位精度は視聴覚刺激が一致しない条件下においても安定しており、マルチモーダルな VR 環境に適した聴覚刺激提示手法であることが示された。

今後は、複数の音源を使用した場合や仰角方向、音源移動時、また高次感性評価等についても検討する予定であり、今後の課題としたい。

参考文献

- [1]城戸健一, “音響と情報”, 情報処理学会, 36(3), 213-216, 1995.
- [2]平原達也, 大谷真, 戸嶋巖樹, “頭部伝達関数の計測とバイノーラル再生にかかわる諸問題”, 電子情報通信学会, 2(4), 68-85, 2009.

- [3]岩谷幸雄, “頭部伝達関数による音像定位-個人化へ向けたデータ群と課題-”, 日本音響学会誌, 73(3), 173-180, 2017.
- [4]尾本章, “立体音場再生技術の現状と展望”, 日本音響材料協会, 205, 19-24, 2024.
- [5]Sami Juha aine, “Cinematic Music Creation in Dolby Atmos: Producing and Mixing Contemporary Cinematic Music in Immersive Audio”, Tampere University of Applied Sciences, Bachelor’s Thesis, 1-49, 2012.
- [6]矢入聡, 岩谷幸雄, 鈴木陽一, “聴覚ディスプレイ”, 情報メディア学会誌, 61(10), 1427-1430, 2007.
- [7]伊勢史郎, “音場共有を実現するための低遅延・実時間信号処理とその実装”, 日本音響学会, 73(9), 608-614, 2017.
- [8]T.Okada and M.Yamataka, “Study of the Optimal Reproduction Method for Living Environment Sources Recorded using Ambisonics”, ICAT-EGVE2024, 2024.
- [9]木村真弘, 梶井浩, 高橋誠, 山本克之, “周辺視野における腹話術効果”, The Virtual Reality Society of Japan, 4(1), 253-260, 1999.
- [10]安藤章男, “音響の高臨場感技術”, 映像メディア学会誌, 66(8), 913-919, 2012.
- [11]S.Sakamoto et al., “A 3D soundspace recording system using spherical microphone array with 252ch microphones”, Proceedings of 20th International Congress on Acoustics, ICA 2010, 2010.
- [12]P.Majdak et al., “Spatially Oriented Format for Acoustics: A Data Exchange Format Representing Head-Related Transfer Functions”, Audio Engineering Society Convention Paper, 134, 1-11, 2013.
- [13]西野隆典, 梶田将司, 武田一哉, 板倉文忠, “水平方向及び仰角方向に関する頭部伝達関数の補間”, 日本音響学会誌, 57(8), 685-692, 2001.
- 西村竜一, “アンビソニックス”, 映像メディア学会誌, 68(8), 616-620, 2014.
- [14]NOISEMAKERS AmbiHead HD, <https://www.noisemakers.fr/product/ambi-head-hd/>, (最終閲覧日 2025/8/20).
- [15]岡本幹彦, 松永英一, “ラウドネス測定方を用いたテレビ番組の音声レベル管理”, 映像メディア学会誌, 66(8), 671-677, 2012.
- [16]M.Raspaud, H. Viste, G. Evangelista, “Binaural Source Localization by Joint Estimation of ILD and ITD”, IEEE Transactions on Audio, Speech, and Language Processing, 18(1), 68-77, 2010.

研究ノート

深層学習にもとづいた自動画像クロッピングシステムの構築

近藤 敏彰*

(2025年9月17日受理)

Development of an Automatic Image Cropping System Based on Deep Learning

Toshiaki KONDO*

(Received September 17, 2025)

Abstract

This study developed an automatic image acquisition system for observing gallium solidification and a deep learning-based automatic image cropping system. Images were labeled with Roboflow, and YOLOv5s was trained on 273 samples. The model achieved high accuracy ($mAP@0.5 \approx 1$ at 10 epochs). The trained model was converted to ONNX format, and a Python/Tkinter GUI application was implemented. The application enabled efficient image processing, reducing processing time to about 1/70 compared with Photoshop. The system is expected to facilitate rapid preparation of machine learning datasets and support research in materials science.

キーワード: 深層学習, 自動画像クロッピング, YOLOv5, ONNX, Raspberry Pi

Keywords : Deep Learning, Automatic Image Cropping, YOLOv5, ONNX, Raspberry Pi

1. はじめに

近年, 医療, 工業, 農業, 小売業などの様々な分野において, 深層学習にもとづいた画像処理システムの応用が提案されている. 例えば, 医療分野では, 画像診断, 内視鏡検査, 遠隔診察などへの応用が提案されており, 診断精度の向上や医療費の低減などに貢献している. 工学分野では, 検品, 検査, 製造プロセスの自動化などに応用され, 製品の品質化, 製造コストの削減などに寄与している. 材料の研究開発分野においても, リチウムイオンバッテリーの電極材性能の評価, ナノ材料の幾何学形状の評価への適用が提案されるなど, 深層学習にもとづいた画像処理システムの有用性が示されつつある.

私たちの研究室ではこれまでに, ガリウムのアノード酸化によるポーラス酸化ガリウムの作製, および, その幾何学形状制御に関して検討を行ってきた[1-3]. ガリウムを酸性電解液中にてアノード酸化すると, ガリウム表面にはナノ細孔配列を有する酸化ガリウム層が形成される. 酸化ガリウムは, ワイドバンドギャップ材料であり, 水の完全分解可能な半導体特性などの特徴を有する事から, パワーエレクトロニクス, 水素生成デバ

イス, 光触媒などへの応用が期待されている. これらデバイスの性能は, ポーラス酸化ガリウムの幾何学形状に大きく依存するため, デバイス性能の向上にはポーラス酸化ガリウムの幾何学形状制御が重要である. これまでの検討において, ポーラス酸化ガリウムのナノ細孔の成長方向は, ガリウムの結晶配向に依存する様子が観察されており, ポーラス酸化ガリウムの幾何学形状の精密制御には, ガリウムの結晶配向制御が必要不可欠だと考えられる.

ガリウムの結晶配向は, 通常, 電子後方散乱回折 (EBSD) 法により評価される. しかし, 本装置は非常に高額であり, 所有施設の数も限られている. また, アノード酸化するサンプルすべてを測定するには, 長時間の作業を要するといった問題がある. 最近の検討において, 液体ガリウムが固化する際のマクロな固化パターンと, 得られるガリウムの結晶配向性に相関がある様子が観察されている. そこで私たちは, 機械学習によりマクロな固化パターンと EBSD 評価結果の相関を学習したモデルを作成し, 本学習モデルにもとづき固化パターンから結晶配向性を推定するシステムの構築を開始した. 本システムによれば, 固化パターンからガ

* 愛知工科大学工学部機械システム工学科, 〒443-0047 愛知県蒲郡市西迫町馬乗 50-2

Department of Mechanical Systems Engineering, Aichi University of Technology, 50-2 Manori, Gamagori 443-0047, Japan

リウムの結晶配向性に関する情報の取得が可能となり、EBSD 測定が不要となるため、ポーラス酸化ガリウムのナノ構造制御に関する研究速度は大幅に改善されるものと考えられる。学習モデルの精度向上には、一般的に、多くの学習データを必要とする。本研究においては、学習データとして、液体ガリウムが固化する様子を撮影した画像データとそれに対応したEBSD測定結果が必要とされる。特に、液体ガリウムが固化する様子は、固化パターンの幾何学的な多様性から、様々な画像データの取得が望まれる。そして大量の学習データを効率的に取得するには、データ取得の自動化が強く望まれる。また得られた画像データは、機械学習に適した形に画像処理(クロッピング, 解像度, 画像サイズ, グレースケール化)する必要があるため、画像処理の自動化も必須である。そこで本研究では、画像データの取得と画像処理を効率化すべく、それらの自動化について検討を行った。画像データ取得の自動化は、Raspberry Pi と CCD カメラからなる撮影システムを構築し実施した。画像処理の自動化は、深層学習にもとづく自動画像クロッピングシステムを構築し実施した。本報告では、これらに関して概説する。

2. 実験方法

図1に、ガリウムサンプルの作製に関する模式図を示す。高純度ガリウム粒を使い捨てのシリンジに入れ、ホットプレートで加熱し、溶融させた。液体ガリウムを、あらかじめ準備しておいたモールド内に注入し、ベルチェ式冷却台の上で冷却することで、固化させた。固化する様子は、Raspberry Pi5 と専用 CCD カメラ (Raspberry Pi Camera Module v2), 単レンズ(直径: 30mm, 焦点距離: 300mm)からなる自動撮影システムを用いて、固化パターンが変化する様子を経時的に撮影した。撮影間隔は 15 秒とした。自動撮影のためのプログラムは Python を用いて作成した。

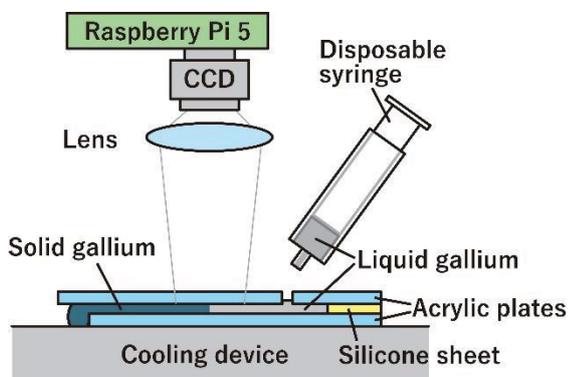


Fig. 1 Schematic of the preparation of a single-crystal Ga

固化パターンは撮影画像(3280×2464ピクセル)の中心付近に存在する。本研究では、撮影画像内の固化パターン付近のみを切り出す自動クロッピングシステムを構築した。まず、機械学習に先立ち、撮影した画像のラベリングを行った。ラベリングには Roboflow (<https://roboflow.com/>)を用いた。Roboflow の HP に移動し、データをアップロードした。そして、全ての画像に対し、切り出したい部分を矩形領域にて指定し、「circle」とラベリングした。ラベリング後、機械学習に利用可能な形式にてデータ出力した。今回、ラベリングした画像の枚数は 273 枚であった。

ラベリングした画像データ 273 枚を、8:1:1 の割合に分割し、それぞれ学習用、検証用、テスト用として機械学習に用いた。本検討では YOLOv5s を配布元 (<https://github.com/ultralytics/yolov5>)よりダウンロードし、機械学習に使用した。YOLOv5s は物体検出用の深層学習モデルの一つである。学習は GPU 環境 (NVIDIA GeForce GTX 1660, 6GB VRAM)にて行った。入力画像サイズは 640×640ピクセル、エポック数は 200, バッチサイズは 16 とした。学習率は 0.01, 最適化手法は SGD (モーメント 0.937, ウェイト減衰 0.0005)とし、いずれも YOLOv5s のデフォルト値を用いた。また、早期終了に関しては Patience20 に設定した。初期重みには yolov5s.pt を用い、データ分割や学習過程における乱数シードは既定値である 42 を用いた。学習後、得られた重みファイルを推論に用いた。

得られた学習モデルの評価には、性能評価指数 mAP@0.5 を用いた。mAP@0.5 は物体検出の分野では一般的に用いられる性能評価指数の一つである。mAP@0.5 の算出は、以下の手順で行った。まず、物体検出における正誤判定を行った。正誤判定は、ラベリングにより指定した検出対象を含む矩形領域(真値領域)と、学習モデルが推定した矩形領域(予測領域)との IoU (Intersection over Union)を用いて行った。IoU は両領域の重なり部分の面積を和集合の面積で割った値であり、次式(1)で表される。

$$IoU = \frac{\text{重なり部分の面積}}{\text{両領域の和集合の面積}} \quad (1)$$

IoU の値が 0.5 以上であれば、その検出は正解と判定し、TP (True Positive) の値としてカウントした。一方、IoU が 0.5 未満で誤って検出されたものは FP (False Positive), 実際には存在する対象を検出できなかったものは FN (False Negative)としてカウントした。次に、これら TP・FP・FN の値を用いて適合率 (Precision)と

再現率 (Recall) を以下の式(2)から算出した。

$$Precision = \frac{TP}{TP + FP}, \quad Recall = \frac{TP}{TP + FN} \quad (2)$$

Precision は検出が正しかった割合を, Recall は存在する対象をどれだけ検出できたかを表す指標である。

次に, YOLOv5s の出力について説明する。YOLOv5s は, 検出したバウンディングボックスごとに 1 つの信頼度 (0~1) を付与する。この値は「その領域に対象が含まれる確からしさ」を表している。物体検出の評価では, 通常この信頼度に対して閾値を設定し, 閾値以上の検出を採用, 未満の検出を棄却する。本研究においても, この一般的な方法を用いた。信頼度の閾値を高く設定すると Precision は上がるが Recall は下がり, 閾値を低くすると Recall は上がるが Precision は下がる。そこで, 信頼度の閾値を 0~1 の範囲で変化させ, それぞれの条件で TP・FP・FN を算出した。この結果を用いて Precision-Recall 曲線 P(R) を作成し, その下側の面積を積分して AP (Average Precision) を求めた(式(3))。

$$AP = \int_0^1 P(R) dR \quad (3)$$

mAP (mean Average Precision) は, 複数のラベルの種類を対象とする場合, それぞれの AP を平均した値であり, 物体検出モデル全体の性能を示す指標である。本研究ではラベルの種類が「circle」のみのため, mAP@0.5 は「circle」に対する AP@0.5 と等価である。

推論処理を効率的に行うため, 学習済みモデルを ONNX (Open Neural Network Exchange) 形式に変換した。ONNX は, 深層学習モデルを異なるフレームワーク間で共通に利用可能とするためのオープンフォーマットであり, 推論を軽量かつ効率的に実行できるといった特徴をもつ。さらに, 処理の手順を簡便化するため, Python (Tkinter) を用いた GUI アプリケーションを作成した。このアプリでは, 画像ファイルまたはフォルダの選択, 保存先およびファイル名接頭辞の指定, 出力サイズと DPI の設定, グレースケール/カラー保存の切り替え, 既処理画像のスキップなどの操作を可能とした。

作製したアプリを用いて, 画像処理に要する時間を評価した。評価には 16 枚のテスト画像を使用した。比較として, Photoshop で 1 枚ずつ処理した場合と, Photoshop で 16 枚を連続処理した場合についても処理時間を測定した。

3. 自動画像撮影システム

図2には, 本検討で構築した自動画像撮影システムの外観写真を示す。ペルチェ式冷却台上にサンプルを配置し, その上部から Raspberry Pi と CCD カメラ, 単レンズからなる撮影システムを用いて, 液体ガリウムが固化する様子 (固化パターン) を撮影した。

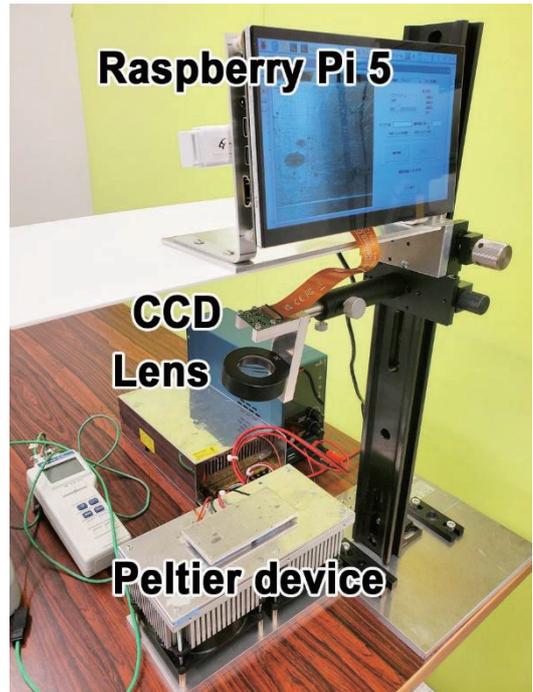


Fig. 2 Photo of the automatic image acquisition system constructed in this study

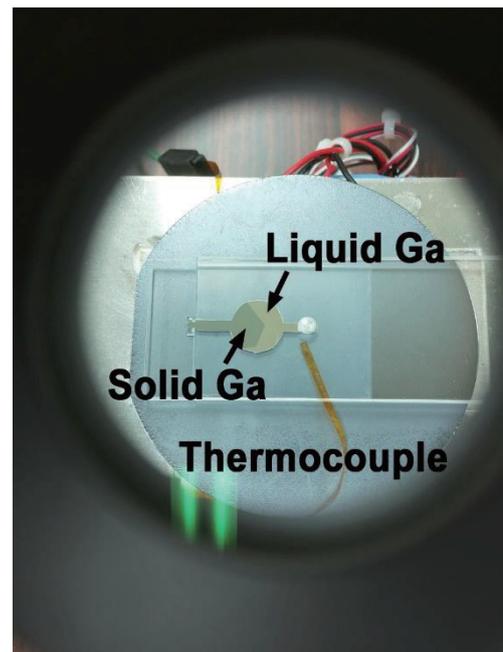


Fig. 3 Typical CCD image

図3には、液体ガリウムが固化する様子を撮影した代表的な写真を示す。写真の中央付近に円形領域があり、その内部には液体ガリウムが充填されている。銀色の領域は液体ガリウム、青く暗い領域は固体ガリウムの領域を表している。固体と液体の境界が直線状であり、特異な幾何学形状を有している様子が観察された。また、時間経過にともない、固体ガリウムの領域が拡大している様子が観察された。本検討では、合計273枚の画像データを取得した。以上のように、本撮影システムによれば、所望の画像群が撮影可能なことが確認された。

4. 自動画像撮影システム

図4にRoboflowの操作画面を示す。読み込んだ画像内の対象物を囲むようにを設定し、「circle」とラベル付けを行った。その後、ラベリング済みのデータを出力し、機械学習に供した。

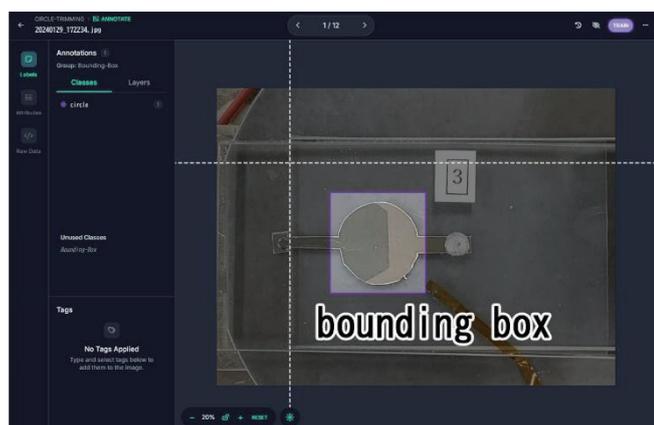


Fig. 4 Screen shot of Roboflow

図5に性能評価指標 mAP@0.5 のエポック数に対する推移を示す。グラフから、エポック数の増加に伴い mAP@0.5 の値が上昇する傾向が確認された。エポック数10で mAP の値がおおよそ1に到達しており、本学習モデルでは学習を約10回行うことで目的領域を高精度に検出できることが明らかとなった。

得られた学習済みモデルは ONNX 形式に変換し、Python を用いて GUI アプリケーションを作成した。図6に、本検討で作製したアプリの GUI のスクリーンショットを示す。本アプリを用いて画像のクロッピングを行った。図7に、クロッピングの結果の一例を示す。比較のために、Photoshop を用いてクロッピングを行った場合についても示す(図7(a))。図7(b)に示すように、Photoshop を用いた場合と同様、円形領域が選択的に切り出されていることが確認され、本アプリによって自動的に所望の領域をクロッピングできることが示された。

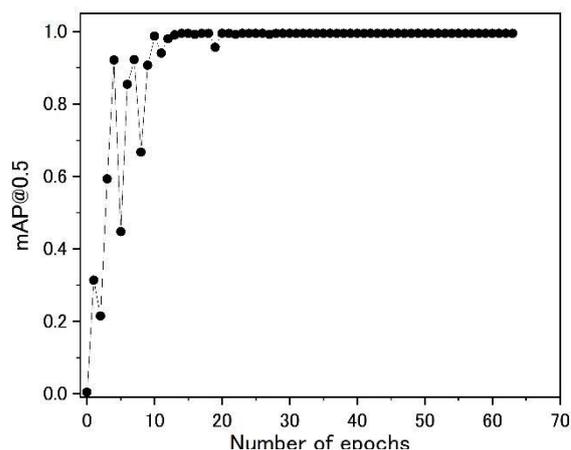


Fig. 5 Dependence of mAP0.5 on the number of epochs

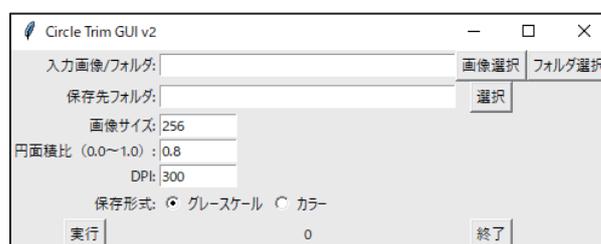


Fig. 6 Screen shot of GUI application

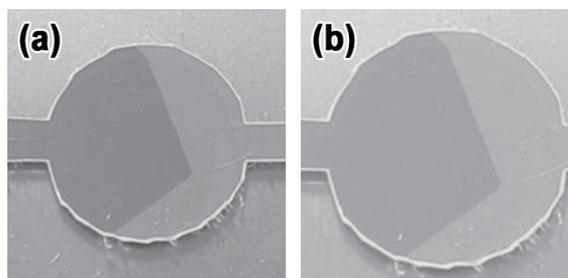


Fig. 7 Cropped image by (a) Photoshop and (b) GUI application

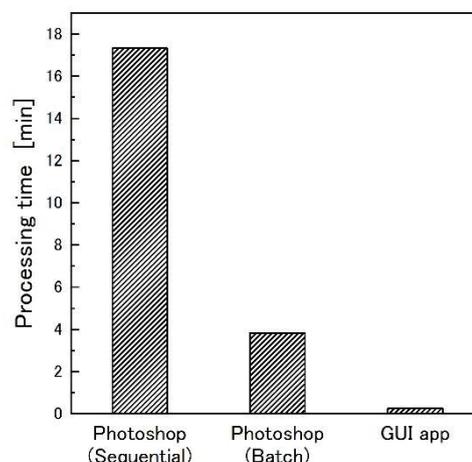


Fig. 8 Comparison of processing time between Photoshop and the GUI application

本アプリを用いた自動クロッピングおよび画像処理に要する時間を測定し評価した。比較として、Photoshop による処理時間(1枚ごとの手動処理, および連続処理)も測定した。本テストには, 画像 16 枚を用いた。図8には, 各手法での処理時間を比較したグラフを示す。本アプリでは, Photoshop を用いて1枚ごとに処理した場合と比較して, 処理時間が約 1/70 に短縮されることが示された。

5. まとめ

本研究において, 自動画像撮影システムと深層学習にもとづく自動画像クロッピングシステムを構築した。本システムを用いることで, 画像の撮影からクロッピング, さらに画像処理までを短時間で実行できることが確認された。本システムは, 機械学習用の学習データ作成に効率的に活用できるものと期待される。

参考文献

- [1] T. Kondo, "Formation of porous Ga oxide with high-aspect-ratio nanoholes by anodizing single Ga crystal", *Scientific Reports*, vol.13, 12408, 2023.
- [2] T. Kondo, H. Matsuya, and H. Habazaki, "Element Distribution in Porous Ga Oxide Obtained by Anodizing Ga in Phosphoric Acid", *Journal of The Electrochemical Society*, vol.170, 081501, 2023.
- [3] T. Kondo, Y. Kuroda, T. Shichijo, T. Yanagishita, and H. Masuda, "Formation of ideally ordered porous Ga oxide by anodization of pretextured Ga", *The Journal of Vacuum Science and Technology B*, vol.40, 010603, 2022.

研究ノート

簡易的な挨拶および握手動作するロボット

高木 温朗*, 村口 黎於奈*, 白 名軒*, 周 承龍**, 孫 浩煬*, 張 超飛**, 裴 艶玲*

(2025年9月10日受理)

An Interactive Robot with Speech Dialogue and Handshake Behavior

Atsuro TAKAGI*, Reona MURAGUCHI*, Mingxuan BAI *, Chenglong ZHOU**, Haoyang SUN *,
Chaofei ZHANG** and Yanling PEI *

(Received September 10, 2025)

Abstract

Speech-dialogue robots often lack non-verbal interaction such as handshakes, which play an important role in human communication. Incorporating physical interaction into dialogue robots may reduce psychological distance between humans and robots. In this study, we developed a prototype interactive robot that integrates speech dialogue, facial expression display, and handshake behavior into a unified interaction flow. The system detects user approach, initiates dialogue, and triggers handshake motion according to the dialogue context. This paper reports on the design and implementation of the proposed system and presents basic operation results.

キーワード: 握手ロボット, 音声会話システム, ヒューマン・ロボット・インタラクション, 触覚フィードバック

Keywords : handshake robot, speech dialogue system, Human-Robot Interaction, Tactile Feedback,

1. はじめに

日本では人口の高齢化に伴い、介護や接客業における人手不足が社会問題となっており、ロボットによる業務代替や省人化へのニーズが高まっている。

近年、音声会話型ロボットは、公共施設や商業空間、観光地などにおいて、情報案内や簡易な会話を担う存在として広く活用されつつある。これらのロボットは、音声認識と応答技術の進歩により自然な言語インタラクションが可能となっているが、依然として人と人との会話において重要な非言語的コミュニケーション要素が不足しているとの指摘もある。

中でも「握手」は、対面場面において歓迎や信頼の表現として世界的に広く受け入れられている身体的行動であり、ロボットにこのような動作を取り入れることは、ユーザとの距離を縮め、会話のきっかけや第一印象の形成に寄与する可能性がある。音声と手部動作を組み合わせた握手ロボットが、人間に対して好意的な印象を与える動作となることが示されており、言語に依存しないコミュニケーション媒体としてのロボットの可能性が示唆されている[1]。

本研究では、音声会話によるあいさつや返答に加

え、ロボットアームによる握手動作を音声対話の流れに連動させて統合的に実現することを目的とする。ユーザーの接近検知を起点とした覚醒、音声会話、表情提示、および握手動作を一連の処理フローとして構成している。

2. ロボットの概要

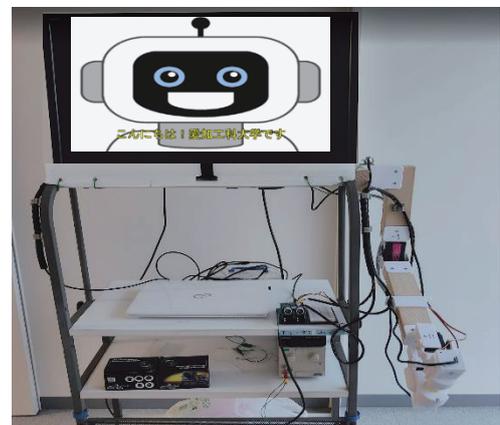


Fig.1 Overview of the conversational robot.

* 愛知工科大学工学部電子ロボット工学科, 〒443-0047 愛知県蒲郡市西迫町馬乗 50-2

Department of Electronic Robot Engineering, Aichi University of Technology, 50-2 Manori, Gamagori, Aichi 443-0047, Japan

** 愛知工科大学工学部情報メディア学科, 〒443-0047 愛知県蒲郡市西迫町馬乗 50-2

Department of Media Informatics, Aichi University of Technology, 50-2 Manori, Gamagori, Aichi 443-0047, Japan

本研究で開発した対話型ロボットは、音声会話機能、視覚的な表情提示機能、およびロボットアームによる握手動作を組み合わせた統合システムである。ロボットの外観を図 1 に示す。ロボットは、ユーザーとの対話を想定した固定設置型構成とし、安定した動作と安全性を確保している。

ユーザーとの対話中には、音声による応答に加えてディスプレイ上に表情画像および字幕を表示することで、視覚的なフィードバックを提供する。これにより、音声情報のみの場合と比較して、ユーザーがロボットの状態や意図を直感的に理解しやすくなる構成となっている。また、音声会話の流れに応じてロボットアームが動作し、握手を行うことで、対話と身体動作が連続したインタラクションを実現している。

3. ロボットアーム

3.1 ロボットアームの構成

本研究で制作したロボットアームは、その外観を図 2 に示し、ユーザーとの握手動作を模倣する機構として設計した。このアームは、肩関節および肘関節を有するロボットアームと、2 本指からなるロボットハンドで構成されている。肘関節および各指にはそれぞれ 1 個のサーボモータを搭載しており、全体で 3 自由度を有する。肩関節は木製フレームを用いて移動棚本体に固定されている。肘部に取り付けられた肘部サーボモータ(型番:RDS51150) [2]は、アームを持ち上げる回転を行う。また、ロボットハンドの指部に設けられた指部サーボモータ(型番:SG-5010) [3]は、指先の開閉に用いられる。

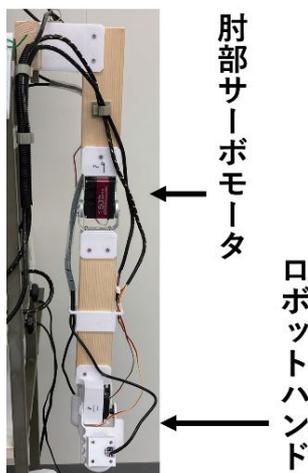


Fig.2 Appearance of the robot arm.

3.2 ロボットハンド

ロボットハンドを図 3 に示す。本ロボットハンドは、触覚センサの搭載を考慮し、機構の簡素化を重視した設計としている。ユーザーが握りやすいように、親指を掛ける部位には突起が、他の 4 本の指を掛ける部位には凹みが設けられている。

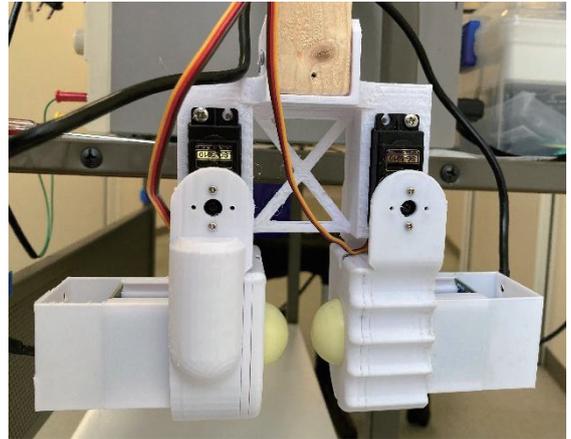


Fig.3 Robot hand.

3.3 センサ

アームの動作には 2 種類のセンサが用いられている。

一つは図 4 に示す超音波センサであり、ユーザーの接近を検知して、ロボットアームを待機状態から動作状態へ移行させる覚醒トリガーとして機能する。

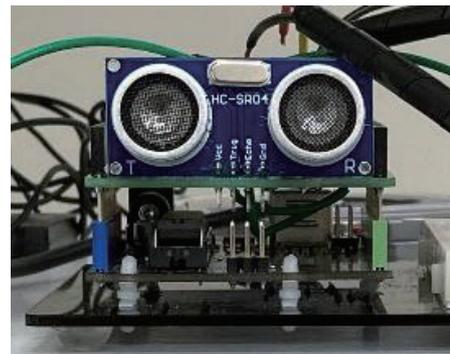


Fig.4 Ultrasonic sensor.

もう一つは、ロボットハンドの指先に搭載された光学式触覚センサであり、カメラ、LED ライト、およびマーカが付いた柔らかいタッチパッドで構成されている [4]。本研究で使用しているタッチパッドは図 5 に示し、遮光幕で覆った半球状をした透明なウレタンジェルをアクリル板で蓋をして封入している。このセンサは半球

状の内部に多数のドットマーカが配置されており、内蔵カメラによって各マーカの変位(位置のずれ)をリアルタイムで捉えることができる。マーカの変位情報に基づいて接触時に生じる反力を推定することが可能であり、本研究では接触状態の取得可能性を確認するために使用した。

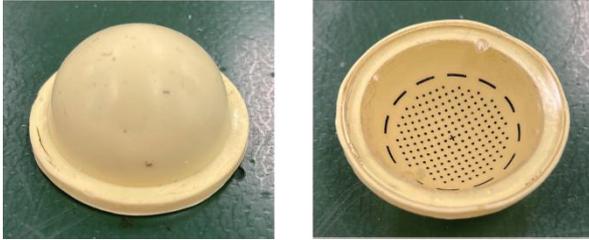


Fig.5 Touch pad.

3.4 ロボットアームの動作

アームの動作制御は、Arduino Uno 上で実装されており、標準の Servo ライブラリを用いて PWM 制御によるサーボ角度の制御を行っている。Arduino 側では Serial.read() によりコマンドを受信し、それに応じた順序でモーションを実行する構成である。

アームの動作シーケンスは、以下の 3 段階から構成される。

- ① 握手準備動作:アームを前方に伸ばし、ハンドを開く。
- ② 握手動作:ハンドを閉じる。
- ③ 握手終了動作:ハンドを開き、アームを元の位置へ戻す。

図 6 に握手の様子を示す。



Fig.6 Handshake interaction between the robot and the user.

4. 音声会話システム

音声会話システムは、音声入力、音声認識、応答生成、音声出力の各処理から構成される。

音声会話は、キーワード応答型のルールベース方

式に基づいて構成されており、類似度判定には difflib.SequenceMatcher を使用している。音声入力には USB マイクを用い、Python の speech_recognition ライブラリを通じて Google Speech API を呼び出し、音声を日本語テキストに変換している。音声出力については、pyttsx3 ライブラリを用いてローカルでテキスト音声合成を行っており、話速などの調整も可能である。

音声会話中は、ユーザーの発話に応じて表情画像と字幕がディスプレイに表示される。表情(neutral / smile / surprised / worried)は、OpenCV による顔認識結果および発話内容に基づいて選択され、Pygame を用いた UI 上に字幕とともに全画面表示される。図 7 にその一例を示す。



Fig.7 Facial expressions and subtitles.

5. 制御システム

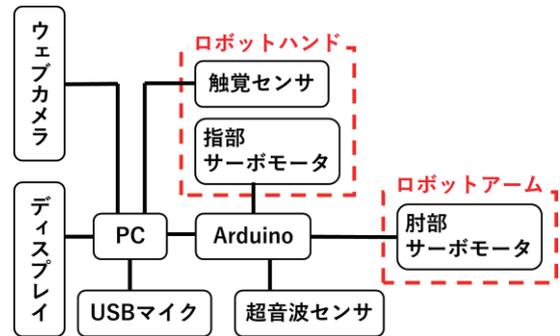


Fig.8 Control system.

図 8 に、本ロボットの制御系構成を示す。本システムは PC を中核とし、各種ハードウェアを統合的に制御するアーキテクチャで構成されている。音声会話処理および画像処理は PC 上で実行され、ロボットアームおよびロボットハンドの動作制御は Arduino を介して行われる。

図 9 に、ユーザーの接近検知を起点とする処理フローを示す。超音波センサによりユーザーの接近を検知すると、ロボットは待機状態から覚醒し、ウェブカメラによる顔検出を行う。顔が検出された場合に音声入力

処理を開始し、音声会話および表情提示を行う。

ロボットアームの動作は、音声会話システムから送信される覚醒トリガーを起点として開始される。握手動作中は、触覚センサによって取得された接触状態を基に動作継続判定を行い、終了と判定された場合には初期姿勢へ復帰する。

会話が終了したと判定された時点で、システムは再び待機状態へ遷移する。

図 10 に、ロボットアームによる握手動作の状態遷移フローを示す。

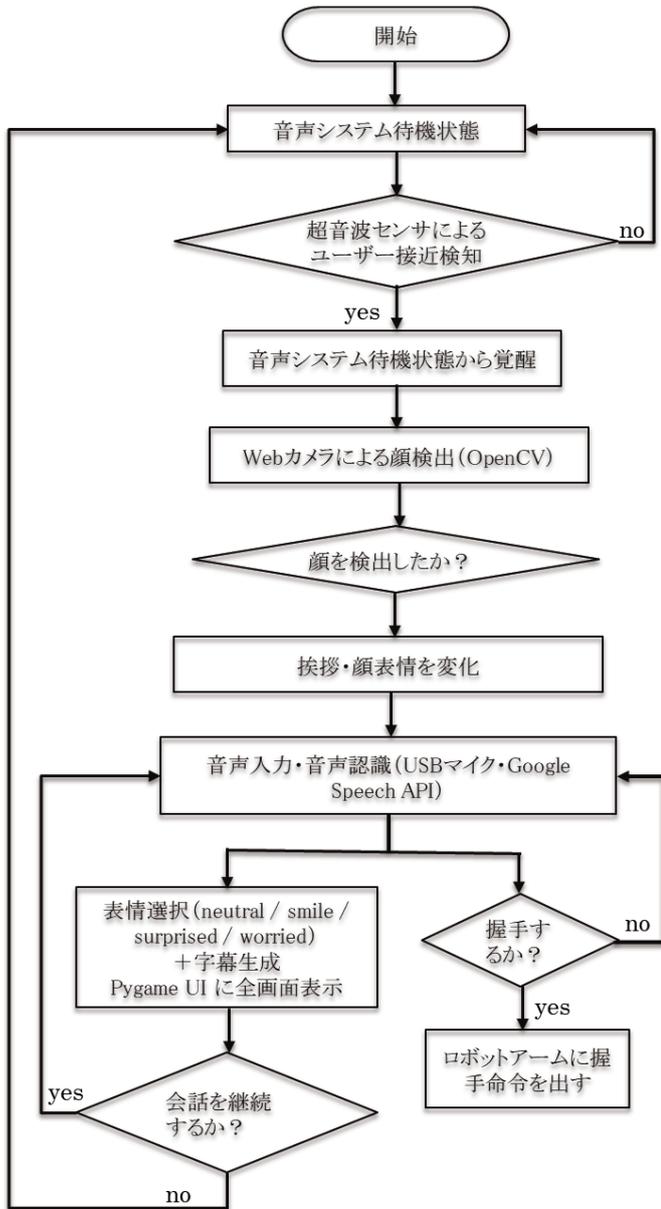


Fig.9 Communication system flowchart.

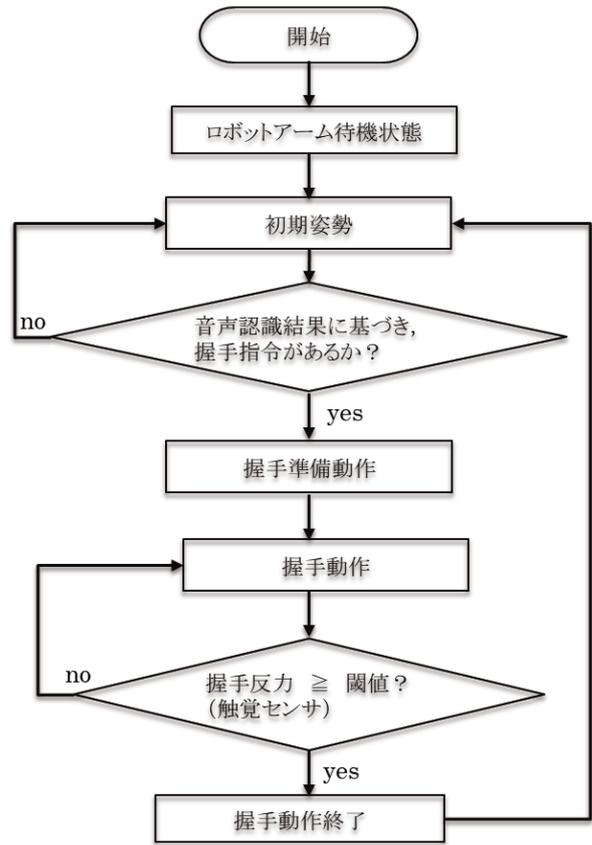


Fig.10 State transition of handshake motion by the robot arm.

6. 動作検証

本章では、各構成要素が意図したとおりに動作するかを確認することを目的とした動作検証を行った。

6.1 ロボットアーム機構

ロボットアームについては、肘部および指部のサーボモータを用いた基本的な屈伸動作と手指の開閉が可能となり、握手を行うための一連の基本機構を実装できた。また、超音波センサによってユーザー接近を検知し、アーム動作の開始をトリガーする仕組みも構築済みである。さらに、触覚センサは指先に設置され、ユーザーの手掌を検知するための基礎的な構成が整った。

6.2 音声会話システム

音声会話システムについては、音声認識・音声合成・表情表示を組み合わせた会話処理が動作可能となり、発話内容に応じた基本的な応答を返すことができる。加えて、会話内容に応じて表情画像と字幕をディスプレイに表示する機能も実装されている。ロボット

アームの動作スクリプトについては、握手準備、握手、終了の一連のモーションが実行可能となり、音声会話システムからのコマンドに基づく動作も確認された。触覚センサの圧力感知スクリプトは、カメラ映像をもとに接触圧の大小を推定する処理が実行できる段階にある。

6.3 動作検証結果

本研究で目指したロボットシステムについて、音声会話システム、ロボットアーム制御、および触覚センサ処理といった基盤的な要素技術は個別に実装され、動作することが確認された。これにより、基礎的な会話および握手動作が可能であることを確認した。しかし各システムに関していくつかの課題が残されている。

6.3.1 ロボットアームの自由度不足

現行のロボットアームは肘部と指部に限定された動作自由度を持つが、肩部の自由度が存在しないため、正面に自然な形で手を差し出す握手動作が困難である。そのため、ユーザー側がロボットの側面に移動する必要があり、人間らしさに欠ける。また、手掌部は触覚センサを優先した簡素な構造となっており、人体の手形状との乖離から握手時の自然さに課題がある。今後は、肩部の自由度追加による動作範囲の拡張と、より軽量・高耐久な構造材の採用により、自然な動作と保守性・安全性の両立を図る。

6.3.2 音声会話システムの課題

音声会話についても、ルールベースに依存しているため応答の柔軟性が低く、発話パターンの限定、騒音下での認識精度低下、ログ記録の欠如などが課題である。

今後は、センサ情報とモーション制御の統合による反応性の向上と、発話シナリオや表情バリエーションの拡充によって、より多様な状況に対応できる会話システムを目指す。

7. 終わりに

本研究では、音声会話、表情提示、およびロボットアームによる握手動作を統合した対話型ロボットを試作し、その構成および動作検証結果を示した。各機能は個別に実装され、基礎的な動作については確認できたものの、システム全体を統合して円滑に動作させるには至っていない。今後は各システムを改良しながら、システムの統合を進めていく。

参考文献

- [1] 太田俊介, 神代充, 山内仁, 渡辺富夫, 柴田論, 山本 智規, “人間との握手接近動作を行う小型握手ロボットシステム”, 日本機械学会論文集 C 編, 79 巻, 803 号, pp.2383-2393, July. 2013.
- [2] HOOYIJ-JP, “RDS51150 デジタルサーボ”, Amazon.co.jp, 2025 年, (参照日:2025 年 8 月 30 日, <https://amzn.asia/d/akflmui>)
- [3] Tower Pro Pte Ltd, “マイクロサーボ SG-5010”, 秋月電子通商, 2025 年, (参照日:2025 年 8 月 31 日, <https://akizukidenshi.com/catalog/g/g108913/>)
- [4] G. Otsuka, G. Obinata, et.al, “Design and Characterization of a Plug-in Device for Tactile Sensing”, ICCINCO 2018, Porto Portuguese, pp.488-493, 2018.

研究ノート

線形代数における行列の階数の意味

高橋 義則*

(2025年11月3日受理)

The Meaning of Rank of Matrix in Linear Algebra

Yoshinori TAKAHASHI*

(Received November 3, 2025)

Abstract

It is known that useless equations are contained as well as useful ones usually in homogeneous or nonhomogeneous simultaneous linear equations. Therefore, by using the idea on the abbreviation of matrix in linear algebra, only useful equations among those linear equations must be chosen in solving process for simultaneous linear equations. The simultaneous linear equations are expressed in the other form by an augmented matrix. The image of the rank of a matrix is explained by giving a familiar example. We understand that the rank means the number of rows of a matrix which are truly useful in solving the simultaneous linear equations.

キーワード: 連立1次方程式, 係数行列, 拡大係数行列, 簡約, 階数

Keywords : Simultaneous Linear Equations, Coefficient Matrix, Augmented Matrix, Abbreviation, Rank

1. はじめに

行列の階数とはどんな事を表す用語だろうか, 多くの線形代数の初学者にとっては理解に悩むものであると思う。因みに階数はランク(rank)とも言われる。以後ランクという用語を用いる。線形代数を学ぶとき, 行列の演算までは順調に進んだものの, 連立1次方程式の解法で急に理解が進まなくなってしまうことが多いようである。係数行列, 拡大係数行列, 簡約な行列, 行列のランクなどと言った用語が出てくるからであろうか。特に, ランクの意味合いを理解することが難しく, この原因として, 連立1次方程式の解の存在と拡大係数行列のランクとの関係について, 整理が付き難いためであると推測する。ランクの意味を数式に寄り過ぎた説明から入るとやはり意味不明に陥る危惧があるので, ここでは教育的観点から, 最初に身近に生活で経験する卑近な例を挙げてランクの概念を説明しよう。先ず, 或る課題に対して解決法を幾人かに提案してもらおう。出揃った提案を精査すると, 幾つかの提案は独自のものでそれらが協同して有効に働くことが分かるが, 一方で, 既出の有効な提案を単に強調しただけのものや, 有効な提案を幾つか混ぜ合わせただけのもので無用なものや, 解決の為の協議自体を不可能にして台無しにしてしまうものなどが混在していることが判明する。一見すると多くの提案が有るように見えても精査してみると, 有効, 無効, 不可能なものに選別することが出来る。こうした状況を考えたとき, 大まかに言って, 数ある提案の中で課題解決に真に有効な提案の本数のことをランクと言う用語の意味であると解釈して良い。問題は有効な提案の選別法である。

幾つかの未知変数があったとき, これ等の未知変数の値を決定する為に, 一連の提案を一次方程式で表したものが連立1次方程式である。中学, 高校で連立1次方程式の解き方に消去法と代入法という方法があることを既に学んだ, 大学の線形代数では, 連立1次方程式の記述や消去法の手続きを行列の記法を用いて体系的に行うことを学ぶ。

2. 連立1次方程式と行基本変形

連立1次方程式を係数行列, 拡大係数行列であらわすことを説明する。 n 個の未知変数を x_1, x_2, \dots, x_n とす

* 愛知工科大学名誉教授, 〒443-0047 愛知県蒲郡市西迫町馬乗 50-2
Professor emeritus, Aichi University of Technology, 50-2 Manori, Gamagori, Aichi 443-0047, Japan

る連立 1 次方程式

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

において

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

と置くと、連立 1 次方程式は $Ax = b$ と表わすことができる。 A を連立 1 次方程式の係数行列という。 $b = 0$ の場合、同時連立 1 次方程式、 $b \neq 0$ の場合、非同時連立 1 次方程式という。連立 1 次方程式の拡大係数行列というのは

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ & & \ddots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right]$$

で与えられ、 A の右に b を並べた形の行列なので、 $[A : b]$ と書き表される。次に、行列の行基本変形、その表し方、簡約とランクを説明する。

i) 行基本変形

行基本変形は連立 1 次方程式を解くときに拡大係数行列に使う行単位で行う操作であって、操作の内容は、元の連立 1 次方程式と拡大係数行列の対比 (→) を見れば分かり易い。

- (1) ある方程式に 0 でない定数を掛ける → 或る行に 0 でない定数を掛ける。
- (2) 或る方程式に他の方程式を何倍かしたものを足す → 或る行に他の行を何倍かしたものを足す。
- (3) 2 つの方程式を並び替える → 2 つの行を入れ替える。

以上の様に行基本変形は平易な操作であることが分かる。

ii) 行基本変形の表し方

変形を受ける行を前に書き、それ自身変形されない行を後に書く。例えば、第 1 行の各成分に第 2 行の各成分の (-3) 倍を加える操作は ① + ② × (-3) のように表す。ここで、①、②などの丸付の数字は当該行列の行番号を表す。次に、行基本変形を有限回繰り返して、簡約な行列といわれるものにする。

iii) 行列の簡約化とランク

簡約な行列の定義[1]

- (1) 全成分が 0 である行があれば、そうでない行よりも下にある。
- (2) 0 でない成分を持つ行の先頭は 1 である。
- (3) 下の行の先頭の 1 は、上の行の先頭の 1 より右にある。
- (4) 先頭の 1 を含む列では、それ以外の成分はすべて 0 である。

上記の定義を、行列を用いて図解すると図 1 の通りである。

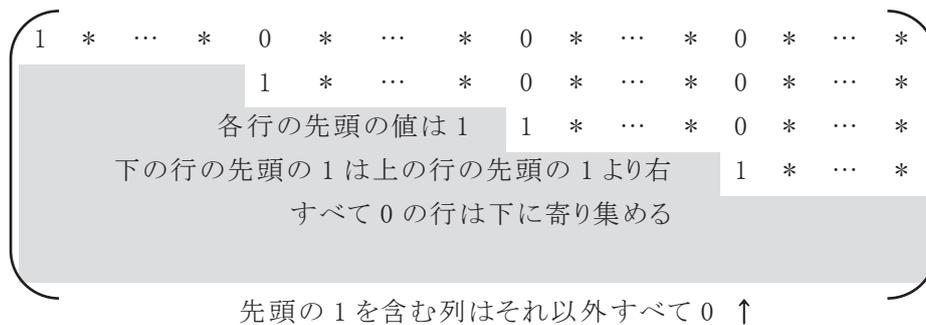


Fig.1 Abbreviation of matrix

図1で陰影部分の成分の値はすべて0, * の値は任意とする. $r + 1$ 行以下の成分がすべて0 のとき, ランクは r であるという. 行列 $[A : b]$ および A のランクをそれぞれ $\text{rank}([A : b])$ および $\text{rank}(A)$ と表す. 端的にいうと, ランクは連立 1 次方程式を解くとき, 真に有効な方程式の本数のことを意味する. 以下に具体的な事例によって更に理解を深める.

3. 簡単な連立 1 次方程式の具体例

例1. 未知変数 x, y の決定に関して 2 本の提案 (2 元連立 1 次方程式) が与えられた場合.

$$\begin{aligned}x + y &= 1 \\x - y &= 2\end{aligned}$$

拡大係数行列で表して簡約化すると,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1/2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3/2 \\ 0 & 1 & -1/2 \end{bmatrix}$$

$$\textcircled{2} - \textcircled{1} \quad \textcircled{2} \times (-1/2) \quad \textcircled{1} - \textcircled{2}$$

と成る. 簡約化の手順は後の事例でも同様であるので, 例 1 について文末に註釈を設けて詳しく説明してある.

これを元の連立 1 次方程式で表すと,

$$\begin{aligned}x + 0y &= 3/2 \\0x + y &= -1/2\end{aligned}$$

つまり, $x = 3/2$, $y = -1/2$ と求められる. この場合,

$$\text{rank}([A : b]) = \text{rank}(A) = 2$$

である. 更にもう1つの提案が与えられたとする.

例2. 例1の第2の提案を単に 4 倍して強調しただけの場合.

$$\begin{aligned}x + y &= 1 \\x - y &= 2 \\4x - 4y &= 8\end{aligned}$$

拡大係数行列で表して簡約化すると,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & -4 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3/2 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\textcircled{2} - \textcircled{1} \quad \textcircled{2} \times (-1/2) \quad \textcircled{1} - \textcircled{2}$$

$$\textcircled{3} + \textcircled{2} \times (-4)$$

第3の提案は, 簡約化すると $0x + 0y = 0$ と同じで, x, y は如何なる値でも良い, つまり, この提案は, x, y 不定を意味する無効な式である. 元は 3 行の拡大係数行列であったが,

$$\text{rank}([A : b]) = \text{rank}(A) = 2$$

である.

例3. 例 1 の第 1 の提案を 3 倍して第2の提案に足して混ぜ合わせただけの場合.

$$\begin{aligned}x + y &= 1 \\x - y &= 2 \\4x + 2y &= 5\end{aligned}$$

拡大係数行列で表して簡約化すると,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1/2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3/2 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\textcircled{2} - \textcircled{1} \quad \textcircled{2} \times (-1/2) \quad \textcircled{3} - \textcircled{2} \quad \textcircled{1} - \textcircled{2}$$

$$\textcircled{3} + \textcircled{1} \times (-4) \quad \textcircled{3} \times (-1/2)$$

第3の提案は、簡約化すると $0x + 0y = 0$ と同じで、 x, y は如何なる値でも良い、つまり、この提案は、 x, y 不定を意味する無効な式である。元は3行の拡大係数行列であったが、

$$\text{rank}([A : b]) = \text{rank}(A) = 2$$

である、

例4. 解決の為の協議自体を不可能にして台無しにしてしまう提案の場合.

$$\begin{aligned} x + y &= 1 \\ x - y &= 2 \\ 2x - y &= 1 \end{aligned}$$

拡大係数行列で表して簡約化すると、

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} &\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1/3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 5/6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3/2 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 5/6 \end{bmatrix} \\ \text{②} - \text{①} & \quad \text{②} \times (-1/2) \quad \text{③} - \text{②} \quad \text{①} - \text{②} \\ \text{③} - \text{①} \times 2 & \quad \text{③} \times (-1/3) \end{aligned}$$

簡約化すると第3の提案は、 $0x + 0y = 5/6$ と同じで、 x, y が如何なる値でも不成立である。つまり、第3の提案によって x, y を求める協議は成立不可能となった訳である。このとき、

$$\text{rank}([A : b]) = 3, \quad \text{rank}(A) = 2$$

である。

今までの例題で、連立1次方程式 $Ax = b$ に解が存在するための必要十分条件は

$$\text{rank}([A : b]) = \text{rank}(A)$$

であることが分かった。

例5. 基本解と特殊解が存在する場合.

未知変数を $x_1 \sim x_4$ として、これらを求める為の提案を以下のように与える。

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 - x_3 + 2x_4 &= 3 \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 &= 1 \\ -x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 &= 9 \\ 2x_1 - 6x_2 - 5x_3 + 4x_4 &= -6 \end{aligned}$$

拡大係数行列で表して簡約化すると、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 2 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & 4 & -2 & 9 \\ 2 & -6 & -5 & 4 & -6 \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -12 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \text{②} + \text{①} & \quad \text{①} + \text{②} \\ \text{③} + \text{①} & \quad \text{③} + \text{②} \times (-3) \\ \text{④} + \text{①} \times (-2) & \quad \text{④} + \text{②} \times 3 \end{aligned}$$

これを元の連立1次方程式で表すと、

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 - 0x_3 + 2x_4 &= 7 \\ 0x_1 + 0x_2 + x_3 + 0x_4 &= 4 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 &= 0 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 &= 0 \end{aligned}$$

と成る。未知変数が4個、それらを定める真に有効な方程式の本数が $\text{rank}([A : b]) = \text{rank}(A) = 2$ なので、未知変数の個数－真に有効な方程式の本数、つまり、 $4 - 2 = 2$ 個の未知変数に任意の値を与えうることが分かる。 s と t を未定数として、

$$x_2 = s, \quad x_4 = t$$

と置くと、未知変数 $x_1 \sim x_4$ の一般解は下記の様に与えられる。結果として、特殊解と同伴な同時連立1次方程

式の基本解の1次結合の和の形で表されることになる。

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 + 3s - 2t \\ s \\ 4 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ここで、

$${}^t[3 \ 1 \ 0 \ 0] \text{ と } {}^t[-2 \ 0 \ 0 \ 1] \text{ および, } {}^t[7 \ 0 \ 4 \ 0]$$

がそれぞれ一組の基本解, および, 特殊解である. 基本解というのは, 同時連立1次方程式の非自明解(0でない解)であり, 未定定数を伴う. 特殊解というのは, 非同時連立1次方程式の未定定数を含まない解のことをいう.

連立1次方程式を解くとき, 拡大係数行列を簡約化して解く利点は, 見落としと無駄が回避できることに在る. 1個1個新しい式を作る様な解き方では, まだ利用していない式をそのままに見落とししてしまうことや, 異なる手順で別々の式を作ったはずが同じ式になってしまう様な無駄が起こり得ることは経験することである.

4. おわりに

線形代数に表れる行列のランクの意味は, 初学者にとっては数式に寄り過ぎた説明では, 手続きが煩雑で理解困難に陥る危惧がある. 本研究では教育的観点に立ち, 最初に身近に生活で経験する卑近な例を挙げてランクを解説した. 課題解決の為の提案を募ると, 玉石混交の案が多数出てくることはよく経験することである. その中で解決の為に真に有効な提案の本数を, ランク概念として捉えたと, その意味が明瞭になることを説明した. この概念を連立1次方程式の解法に適用して, 拡大係数行列を簡約する方法を通じてランクの数学的理解を深めた. 連立1次方程式を解くことにおいては, 未知変数の値を求めることが課題解決に相当し, その為の提案は一連の1次方程式の集まりに相当する. 連立1次方程式には, 通常は一見しただけでは見抜くことが困難であるが, 有用な式と, 無用な式か, あるいは解不能にしてしまう式などが混在している. 拡大係数行列を簡約化すると, 結果的に, 玉石混交の一連の方程式を選別することができ, $Ax = b$ という連立1次方程式の中, 解を求めるのに真に有効な方程式の本数 $\text{rank}([A : b])$ が与えられることになる.

方程式を解くということは, 幾多の提案式で未知変数に掛かる係数だけを拡大係数行列の形式に表し, 行基本変形の操作で体系的に未知変数を解いていることにすぎないことが分かる. したがって, 連立1次方程式を消去法で解くことに比べて方程式の見落としや無駄な式変形を避けることが出来る. 連立1次方程式で重要な問題として, 未知変数の個数と, $\text{rank}([A : b])$ の値によっては, 基本解と特殊解の分類が生じることを示した. 具体的に, 連立1次方程式を幾つか取り上げ, 行列の簡約の仕方やランクの求め方, 更に基本解と特殊解の分類を示した. これによって, 初学者にとってランクの理解が促進されるものと思う.

本研究は, 筆者の60年も昔の学生時代のことを思い起こしたとき, 今考えれば何でもないことのようにはあるが, 当時, ランクの理解が難しく, また不十分であったことなどの述懐でもある.

参考文献

[1] 橋口秀子, 星野慶介, 山田宏文, “線形代数入門”, 学術図書出版社, pp.36, 2015.

註釈

拡大係数行列の簡約化の手順を例1について説明する. 行基本変形の操作にしたがって, 先ず初めの拡大係数行列の2行目の各成分から1行目の各成分を引算して(②-①)次の第2の行列とする. 第2の行列の2行目の各成分に(-1/2)を掛算して(②×(-1/2))次の第3の行列とする. 更に第3の行列の1行目の各成分から2行目の各成分を引算して(①-②)次の第4の行列とすることである. 尚, ①, ②などの丸付の数字は当該行列の行番号を表す.

可積分系における数理物理入門 I

米田 守重*

(2025年6月12日受理)

An Introduction to Mathematical Physics in Integrable Systems I

Morishige YONEDA*

(Received June 6, 2025)

Abstract

This overview article is intended to provide an introduction to mathematical physics for those new to integrable systems. In this overview article, we introduce the wave function of an N-body by the Bethe ansatz and derive the Bethe ansatz equations using only rudimentary knowledge of quantum mechanics.

キーワード: 可積分系, Bethe 仮説, Bethe 仮説方程式, 量子力学

Keywords: Integrable system, Bethe ansatz, Bethe ansatz equation, Quantum mechanics

1. はじめに

可積分系 (Integrable Systems) とは, 無限個の保存則を持つ系を指す. 本解説では, 現在の広範囲な研究分野を含む可積分系の研究テーマ中でも, 特に物理学的な立場に従って, Bethe 仮説方法[1-21]に焦点を絞って解説を行い, 初等的な量子力学的の知識のみを用いて, Bethe 仮説による N 体の波動関数を導入し, Bethe 仮説方程式の導出までの過程を詳しく解説する.

2. Bethe 仮説の方法

Hamiltonian として, Lieb-Liniger 模型[6-7]と呼ばれる, 以下のような delta 関数型相互作用をしている, 1次元 N Bose 粒子系

$$\hat{H} = -\sum_{i=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + 2J \sum_{i<j} \delta(x_i - x_j), \quad (1)$$

を考える. ここで $J > 0$, $\hbar^2/2m = 1$ とした.

式(1)を満たす波動関数 $\psi(x_1, x_2, \dots, x_N, t)$ の, 対称性に関する制限は特に設けないが, 以下の2つの仮定 i), ii) を与える.

i) N 個の粒子の運動量を $P_1, P_2, \dots, P_{N-1}, P_N$ として, これらの衝突過程がすべて完全弾性衝突であり, 従って衝突後も, これらの運動量の置換の組になっている.

ii) N 個の粒子が存在する1次元領域を $-L/2$ から $L/2$

として, これを N 等分の区分に分割し, これらの区間に存在する粒子は, 相互作用のない場合はそれぞれの区分に存在し, 相互作用のある場合は点接触型相互作用に限るものとする.

2.1 2体波動関数及び S 行列

仮定 i), ii) を考慮した2体の波動関数は次のようになる, (以後の Q や P , それらの subscript の意味等の詳細については[11]~[13]を参照のこと.)

$$\psi(x_a, x_b) = \sum_{Q,P} A_{QP} \theta(x_{Q_a} < x_{Q_b}) \exp(ik_{P_a} x_{Q_a} + ik_{P_b} x_{Q_b}), \quad (2)$$

ここで, θ は step 関数を表している. 式(2)は, 2個の粒子が, 1次元空間の点 x_a と x_b にいる場合の波動関数であり, Q は座標すべての置換, P は運動量すべての置換を表している. 式(2)をもう少し具体的に表すと,

$$\begin{aligned} \psi(x_a, x_b) = & \theta(x_a < x_b) \left[A_{Q_{ab}P_{ab}} e^{i(k_a x_a + k_b x_b)} + A_{Q_{ba}P_{ba}} e^{i(k_b x_a + k_a x_b)} \right] \\ & + \theta(x_b < x_a) \left[A_{Q_{ba}P_{ab}} e^{i(k_a x_b + k_b x_a)} + A_{Q_{ab}P_{ba}} e^{i(k_b x_b + k_a x_a)} \right], \quad (3) \end{aligned}$$

となる. 式(3)に波動関数の連続の条件

$$\psi(x_a, x_b) \Big|_{x_a=x_b} = \psi(x_b, x_a) \Big|_{x_a=x_b}, \quad (4)$$

を課すると, 振幅 A_{QP} には,

* 愛知工科大学工学部 基礎教育, 〒443-0047 愛知県蒲郡市西迫町馬乗 50-2

Comprehensive Education Center, Aichi University of Technology, 50-2 Manori, Gamagori, Aichi 443-0047, Japan

$$A_{Q_{ab}P_{ab}} + A_{Q_{ab}P_{ba}} = A_{Q_{ba}P_{ab}} + A_{Q_{ba}P_{ba}}, \quad (5)$$

が成立する.

これらに加え, 2体の Schrödinger 方程式

$$\hat{H}\psi(x_a, x_b) = (k_a^2 + k_b^2)\psi(x_a, x_b), \quad (6)$$

を満足するような条件を求めると, 次のような振幅に関する連立方程式

$$i(k_a - k_b)(A_{Q_{ba}P_{ab}} - A_{Q_{ab}P_{ba}}) + J(A_{Q_{ab}P_{ab}} + A_{Q_{ba}P_{ba}}) = 0 \quad (7)$$

$$i(k_a - k_b)(A_{Q_{ab}P_{ab}} - A_{Q_{ba}P_{ba}}) + J(A_{Q_{ba}P_{ab}} + A_{Q_{ab}P_{ba}}) = 0 \quad (8)$$

が導出される. これらについて解くと, 振幅間に

$$A_{Q_{ab}P_{ba}} = S(k_a - k_b)A_{Q_{ab}P_{ab}} \quad (9)$$

の関係が導出される. ここで $S(k_a - k_b)$ は, a 番目の運動量 k_a と b 番目の運動量 k_b を結ぶ S 行列であり,

$$S(k_a - k_b) = \frac{(k_a - k_b)\hat{P}^{ab} - iJ}{k_a - k_b + iJ}, \quad (10)$$

によって定義される. ここで \hat{P}^{ab} は, 位置座標 x_a と x_b を置換する置換演算子である.

以上の2体の波動関数による, 2体相互作用の過程を図示すると, 次のようになる.

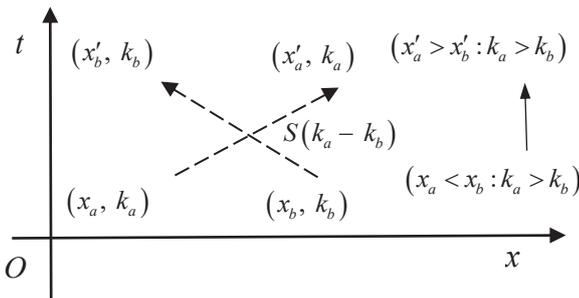


図1 2体相互作用の図

図1に従う S 行列間の関係式として,

$$S(k_a - k_b)S(k_b - k_a) = 1, \quad (11)$$

が知られている.

式(11)の関係式は, S 行列の unitarity と呼ばれて

いて, とても重要である.

次に, 2体相互作用を参考に, 3体相互作用を考えると, 図2のようになる.

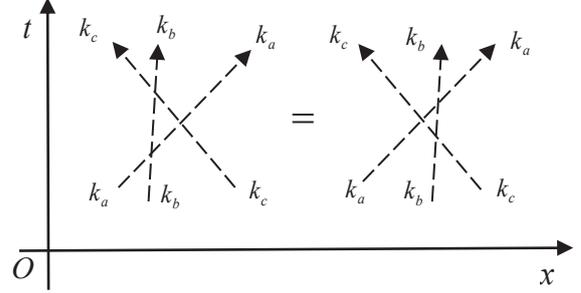


図2 3体相互作用の図

図2に従う, S 行列間の関係式は次のようになる

$$S(k_b - k_c)S(k_a - k_c)S(k_a - k_b) = S(k_a - k_b)S(k_a - k_c)S(k_b - k_c). \quad (12)$$

式(12)の関係式は, S 行列の因子化 (factorization) と呼ばれる. これら2つは特に重要である. 以上, 同様の考察から, 4体相互作用の図は, 次のようになる.

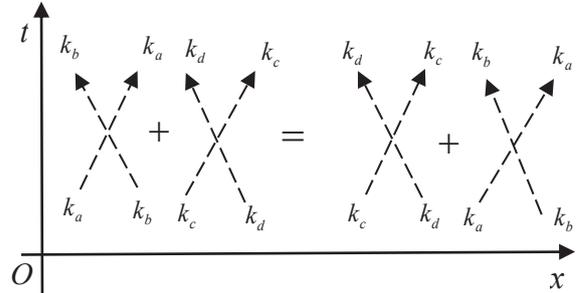


図3 4体相互作用の図

図3に従う, S 行列間の関係式は次のようになる

$$S(k_a - k_b)S(k_c - k_d) = S(k_c - k_d)S(k_a - k_b). \quad (13)$$

式(13)の関係式は, 4体相互作用が, 2つの独立に生じた, 2体相互作用から, 作られていることを意味している.

2.2 N体波動関数と Bethe 仮説

前節の結果から, S 行列の物理的な性質は, 以下の3つにまとめられる.

i) 散乱の前後に於いて, 粒子数の変化はない(粒子数保存則).

ii) 散乱の前後に於いて、運動量の組 (k_1, k_2, \dots, k_N) の変化はない(運動量保存則, 完全弾性散乱).

iii) 多粒子の散乱は, すべて独立に起きた2粒子の散乱の組み合わせで作ることが可能である.

以上, i)~iii)の性質をすべて考慮した上で, 1次元の2体の波動関数である式(2)を, 1次元の N 体の波動関数として, 次式のように拡張することが出来ると仮定する

$$\psi(x_1, x_2, \dots, x_N) = \sum_{Q,P} A_{QP} \theta(x_{Q_1} < x_{Q_2} < \dots < x_{Q_N}) \times \exp\left(i \sum_{j=1}^N k_{P_j} x_{Q_j}\right). \quad (14)$$

N 体の波動関数を, 式(14)のような形に置くことを Bethe 仮設 (Bethe ansatz) という. 式(14)の空間座標に於ける領域は,

$$-\frac{L}{2} < x_{Q_1} < x_{Q_2} < \dots < x_{Q_{N-1}} < x_{Q_N} < \frac{L}{2}. \quad (15)$$

のように書ける. 波動関数, 式(14)に周期的境界条件を課するために, 次のように置く

$$\psi(x_1, x_2, \dots, x_N) \equiv \sum_Q \psi_Q$$

$$\psi_Q \equiv \sum_P A_{QP} \exp\left[i(k_{P_1} x_1 + k_{P_2} x_2 + \dots + k_{P_N} x_N)\right], \quad (16)$$

周期的境界条件は次のように与える,

$$\psi_Q(x_1, x_2, \dots, x_{j-1}, x_j = -L/2, x_{j+1}, \dots, x_N)$$

$$= \psi_Q(x_1, x_2, \dots, x_{j-1}, x_j = L/2, x_{j+1}, \dots, x_N). \quad (17)$$

式(17)を式(16)に課すると,

$$A_{QP} \exp\left[i\left(k_1 x_1 + k_2 x_2 + \dots + k_j \frac{-L}{2} + \dots + k_{P_N} x_N\right)\right]$$

$$= A_{QP'} \exp\left[i\left(k_1 x_1 + k_2 x_2 + \dots + k_j \frac{L}{2} + \dots + k_{P_N} x_N\right)\right] \quad (18)$$

となる. 運動量の組の置換群の可能な組み合わせから, P と P' を具体的に書くと次のようになる

$$P \rightarrow \begin{pmatrix} -L/2 & x_{Q_1} & x_{Q_2} & \dots & \dots & x_{Q_{N-1}} & x_{Q_N} \\ k_j & k_{j+1} & k_{j+2} & \dots & k_N & k_1 & k_2 & \dots & k_{j-2} & k_{j-1} \end{pmatrix},$$

$$P' \rightarrow \begin{pmatrix} x_{Q_1} & x_{Q_2} & x_{Q_3} & \dots & \dots & x_{Q_N} & L/2 \\ k_{j+1} & k_{j+2} & k_{j+3} & \dots & k_N & k_1 & k_2 & \dots & k_{j-1} & k_j \end{pmatrix}. \quad (19)$$

従って, 周期的境界条件を課した結果

$$A_{QP} = A_{QP'} \exp(ik_j L) \quad (20)$$

の関係が導出される. 式(9)の両辺に, 座標に関する置換演算子 \hat{P}^{ab} を作用させると次のようになる:

$$A_{Q_{ab}P_{ba}} = \hat{X}^{ab} A_{Q_{ab}P_{ab}},$$

$$\hat{X}^{ab} \equiv \frac{(k_a - k_b) - iJ \hat{\Gamma}^{ab}}{k_a - k_b + iJ}. \quad (21)$$

従って, \hat{X}^{ab} は空間座標と運動量を同時に交換する演算子である. 隣り合った振幅 $A_{Q_{j+1}P_{j+1}}$ と $A_{Q_{j+1}P_{j+1}}$ との間に次のような関係

$$A_{Q_{j+1}P_{j+1}} = \hat{X}^{jj+1} A_{Q_{j+1}P_{j+1}} \quad (22)$$

が成立するので, この関係式を式(19)に用いると,

$$A_{QP} = \hat{X}^{j+1j} \hat{X}^{j+2j} \dots \hat{X}^{N-1j} \hat{X}^{Nj}$$

$$\times \hat{X}^{1j} \hat{X}^{2j} \dots \hat{X}^{j-2j} \hat{X}^{j-1j} A_{QP'}, \quad (23)$$

のように, P から P' は隣り合った同志の置換で, お互いに移しうる. これに式(20)の周期的境界条件を課した結果と式(21)による X^{mj} の定義を用いると

$$\exp(ik_j L) = \prod_{m \neq j}^N \frac{k_m - k_j - iJ}{k_m - k_j + iJ} \equiv \prod_{m \neq j}^N e^{i\Delta(k_m - k_j)}, \quad (24)$$

$$k_j L = 2\pi n_j + \sum_{m \neq j}^N \Delta(k_m - k_j), \quad (25)$$

となる. ここで, n_j は任意の整数である. 式(23)及び(25)は, Bethe 仮設方程式 (Bethe ansatz equations) といひ, Bethe 仮設による固有値問題の解析の出発点となる. (詳細については[11] ~ [13]を参照のこと.)

3. 非線形 Schrödinger 方程式との同等性

式(1)の Hamiltonian の期待値をとると, 次のような Hamiltonian 密度

$$\mathcal{H} = -\psi^*(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x) + 2J \psi^*(x) \psi^*(x) \psi(x) \psi(x) \quad (26)$$

となる. 従って, 式(26)の Hamiltonian 密度は, デルタ関数型相互作用をしている1次元 N 粒子系と同等であることが知られている. その運動方程式は, 1+1次元非線形 Schrödinger 方程式であり, 可積分系である soliton 系の方程式の一つとして知られている.

4. まとめと展望

最も基本的な可積分系として、物理学的な立場に従って、デルタ関数型相互作用をしている1次元 N Bose 粒子系に於いて、Bethe 仮説による N 体の波動関数を導入し、Bethe 仮説方程式を、初等的な量子力学的考察から導出するまでの過程を解説した。H. Bethe による最初の論文[1]から、90年以上の長い歴史を持つ Bethe 仮説による可積分系の解析的方法であるが、近年では非平衡系[12]、量子エンタングルメント[15]、超弦理論[18-21]への応用される等、さらなる発展が期待されている分野でもある。

参考文献

- [1] H.A. Bethe, “Zur Theorie der Metalle”, Zeit. für Physik, vol.71, no.1, pp.205-231, 1931.
- [2] R.J. Baxter, “Exactly solved models in statistical mechanics”, Academic Press, London, 1982.
- [3] M. Takahashi, “Thermodynamics of One-Dimensional Solvable Models”, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999.
- [4] M. Gaudin, “The Bethe Wavefunction”, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2014.
- [5] E.H. Lieb, T. Schultz and D. Mattis, “Two soluble models of an antiferromagnetic chain”, Ann. Phys., vol.16 pp.407-466, 1961.
- [6] E.H. Lieb and W. Liniger, “Exact analysis of an interacting Bose gas. I. The general solution and the ground state”, Phys. Rev., vol.130, pp. 1605-1616, 1963.
- [7] E.H. Lieb, “Exact analysis of an interacting Bose gas. II. The excitation spectrum”, Phys. Rev., vol.130, pp.1616-1624, 1963.
- [8] C.N. Yang, “Some Exact Results for the Many-Body Problem in one Dimension with Repulsive Delta-Function Interaction”, Phys. Rev. Lett., vol.19, pp.1312-1314, 1967.
- [9] C.N. Yang and C.P. Yang, “S Matrix for the One-Dimensional N -Body Problem with Repulsive or Attractive δ -Function Interaction”, Phys. Rev., vol.168, pp.1920-1923, 1968.
- [10] C.N. Yang, “Selected Papers 1945-1980 of Chen Ning Yang”, World Scientific Series in 20th Century Physics: vol.36, World Scientific, Singapore, August 2005.
- [11] 出口哲生, 1次元量子系の厳密解とベーテ仮説の数理物理, 物性研究 vol.74-3 pp.255-319, 2000.
- [12] 出口哲生, 佐藤純, 上西慧理子, “可積分量子多体系の非平衡ダイナミクスと統計力学の基礎”, 日本物理学会誌 70 (6), pp.419-426, 2015.
- [13] 国場敦夫, “ベーテ仮説と組合せ論”, 朝倉書店, 東京, 2011.
- [14] 南和彦, “格子模型の数理物理”, サイエンス社, 東京, 2014.
- [15] 松枝宏明, “量子系のエンタングルメントと幾何学”, 森北出版, 東京, 2016.
- [16] Y.-Z. Jiang, Y.-Y. Chen and X.-W. Guan, “Understanding many-body physics in one dimension from the Lieb-Liniger model”, Chin. Phys. B, vol.24, no.5, pp.050311-1923, 2015.
- [17] 坂本玲峰, アナトール N. キリロフ, “ベーテ仮説の数理”, 森北出版, 東京, 2021.
- [18] Y. Satoh, “Gauge/string duality and thermodynamic Bethe ansatz equations (Infinite Analysis 2010 Developments in Quantum Integrable Systems)”, RIMS Kokyuroku Bessatsu B28, pp.171-192, 2011.
- [19] Y. Satoh, “Gluon scattering amplitudes from gauge/string duality and integrability”, Nuclear Physics B - Proceedings Supplements, pp.251-252, 2012.
- [20] 佐藤勇二, “AdS 空間中の極小曲面とグルーオン散乱振幅”, 数理解析研究所講究録, 京都大学数理解析研究所, 1880, pp.42-71, 2014.
- [21] 佐藤勇二, “弦理論と可積分性”, サイエンス社, 東京, 2021.

双曲線関数と置換積分

大迫 尚行*

(2025年9月8日受理)

Hyperbolic Functions and Integration by Substitution

Naoyuki OHSAKO*

(Received September 8, 2025)

Abstract

Hyperbolic functions are functions that are only introduced in university, but they are not used very often and are not very familiar, with people only learning their names. However, by using hyperbolic functions in the substitution integral method, the answer can often be found smoothly.

In this paper, we introduce hyperbolic functions, derive formulas similar to trigonometric functions, and discuss how to use hyperbolic functions in substitution integrals.

キーワード: 指数関数, 偶関数, 奇関数, 双曲線, 媒介変数表示, 相互関係, 加法定理, 倍角の公式, 半角の公式, 逆双曲線関数, 置換積分

Keywords: Exponential function, Even function, Odd function, Hyperbola, Parametric representation, Mutual relations, Addition theorem, Double angle formulas, Half angle formulas, Inverse hyperbolic functions, Integration by substitution

1. はじめに

双曲線関数は、大学でようやく登場する関数であるが、ほとんどの教科書では、軽く触れる程度であるため、あまり馴染みのない関数であろう。しかし、置換積分法で、双曲線関数を用いると、スムーズに解答できることが多い。本論文では、双曲線関数について解説し、三角関数と類似した公式の導出や置換積分法における双曲線関数の使い方について述べる。

2. 双曲線関数

まず、準備として、関数の基本的事項について述べる。原点に関して対称な区間を定義域とする関数 $f(x)$ について、 $f(-x) = f(x)$ を満たすとき、 $f(x)$ を偶関数といい、 $f(-x) = -f(x)$ を満たすとき、 $f(x)$ を奇関数という。特に、 $f(x)$ が偶関数かつ奇関数であるとき、 $f(x)$ は恒等的に0と等しくなり、記号で $f(x) \equiv 0$ と表す。偶関数、奇関数の性質として、偶関数どうしの和および差は、いずれも偶関数となり、同様に、奇関数どうしの和および差は、いずれも奇関数となる。また、偶関数と奇関数の積および商については、奇関数の個数が偶数個の場合は偶関数、奇数個の場合は奇関数となる。例えば、 $x \sin x$ は積の中に奇関数が2個(偶数個)含ま

れているから偶関数となり、 $\frac{\cos x}{\sin x}$ は商の中に奇関数が1

個(奇数個)含まれているから奇関数となる。

命題 2.1. 原点に関して対称な区間を定義域とする関数 $f(x)$ は、偶関数 $f_{\text{even}}(x)$ と奇関数 $f_{\text{odd}}(x)$ で、

$$f(x) = f_{\text{even}}(x) + f_{\text{odd}}(x) \quad (2.1)$$

と一意的に表される。このとき、偶関数 $f_{\text{even}}(x)$ と奇関数 $f_{\text{odd}}(x)$ は、それぞれ

$$\begin{aligned} f_{\text{even}}(x) &= \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) \\ f_{\text{odd}}(x) &= \frac{1}{2}(f(x) - f(-x)) \end{aligned} \quad (2.2)$$

と書ける。

[証明] 関数 $f(x)$ が偶関数 $f_{\text{even}}(x)$ と奇関数 $f_{\text{odd}}(x)$ の和で(2.1)のように表されたとすると、 $f(-x) = f_{\text{even}}(-x) + f_{\text{odd}}(-x) = f_{\text{even}}(x) - f_{\text{odd}}(x)$ となる。これと(2.1)を足して2で割ると、(2.2)の $f_{\text{even}}(x)$ の式が得られ、(2.1)から $f(-x) = f_{\text{even}}(x) - f_{\text{odd}}(x)$ を引いて2で割ると、(2.2)の $f_{\text{odd}}(x)$ の式が得られる。逆に、(2.2)で与えられた $f_{\text{even}}(x)$ と $f_{\text{odd}}(x)$ がそれぞれ偶関数、奇関数であることを示す。 $f_{\text{even}}(-x) = \frac{1}{2}(f(-x) + f(x)) = f_{\text{even}}(x)$ より、 $f_{\text{even}}(x)$ は偶関数となり、同様に、 $f_{\text{odd}}(-x) = \frac{1}{2}(f(-x) - f(x)) = -f_{\text{odd}}(x)$ より、 $f_{\text{odd}}(x)$

* 愛知工科大学総合教育センター, 〒443-0047 愛知県蒲郡市西迫町馬乗 50-2
Comprehensive Education Center, Aichi University of Technology, 50-2 Manori, Gamagori, Aichi 443-0047, Japan

は奇関数となる. また, (2.2)の 2 つを足すと $f(x)$ と等しくなり, (2.1)が得られる. (2.1)の $f_{even}(x)$ と $f_{odd}(x)$ の一意性については, もう一つの偶関数 $\widetilde{f_{even}}(x)$ と奇関数 $\widetilde{f_{odd}}(x)$ を用いて, $f(x) = \widetilde{f_{even}}(x) + \widetilde{f_{odd}}(x)$ と表されたとする, $f(x) = f_{even}(x) + f_{odd}(x) = \widetilde{f_{even}}(x) + \widetilde{f_{odd}}(x)$ より, $f_{even}(x) - \widetilde{f_{even}}(x) = \widetilde{f_{odd}}(x) - f_{odd}(x)$ となる. この関数は偶関数であり, かつ奇関数となるから, 恒等的に 0 と等しくなる. すなわち, $\widetilde{f_{even}}(x) = f_{even}(x)$, $\widetilde{f_{odd}}(x) = f_{odd}(x)$ となる. (証明終)

指数関数 e^x は, 原点に関して対称な区間 $(-\infty, \infty)$ で定義される関数であるから, (2.2)による(2.1)の表現が可能である. $f(x) = e^x$ とすると, $f_{even}(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$, $f_{odd}(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ となるが, これらは双曲線関数とよばれ, $\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$, $\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ と表される. したがって, 指数関数 e^x の(2.1)による表現は,

$$e^x = \cosh x + \sinh x \quad (2.3)$$

となる. (2.3)において, x を $-x$ に置き換えると, $\cosh(-x) = \cosh x$, $\sinh(-x) = -\sinh x$ であるから,

$$e^{-x} = \cosh x - \sinh x \quad (2.4)$$

となる. (2.3)と(2.4)は逆数の関係にあり, これらの積はちょうど 1 になるから,

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \quad (2.5)$$

となり, $(X, Y) = (\cosh x, \sinh x)$ は双曲線 $X^2 - Y^2 = 1$ 上の点であることがわかる. \cosh は hyperbolic cosine(ハイパボリック・コサイン)と読み, 双曲余弦関数という. 他も同様である. 他の双曲線関数についても, 三角関数の名称の末尾に h を追記して,

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad \operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}, \quad \operatorname{csch} x = \frac{1}{\sinh x},$$

$$\operatorname{coth} x = \frac{1}{\tanh x} \text{ と表される.}$$

(2.5)の両辺を $\cosh^2 x$ で割ると, $\operatorname{sech} x$ と $\tanh x$ の関係式

$$1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x \quad (2.6)$$

が得られ, 同様に, (2.5)の両辺を $\sinh^2 x$ で割ると, $\operatorname{csch} x$ と $\operatorname{coth} x$ の関係式

$$\operatorname{coth}^2 x - 1 = \operatorname{csch}^2 x \quad (2.7)$$

が得られる.

$$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), \sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \text{ において, } x$$

を ix に置き換えると,

$$\cosh(ix) = \cos x, \quad \sinh(ix) = i \sin x \quad (2.8)$$

となり, 双曲線関数と三角関数の関係式が得られる.

次に, 双曲線関数 $y = \cosh x$, $y = \sinh x$, $y = \tanh x$ のグラフを Fig.1 に示す.

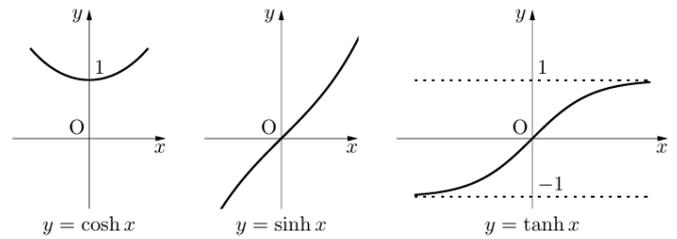


Fig.1 Graph of $y = \cosh x$, $y = \sinh x$, $y = \tanh x$

Fig.1より, $\cosh x$, $\sinh x$, $\tanh x$ の値域は, それぞれ

$$1 \leq \cosh x < \infty, \quad -\infty < \sinh x < \infty, \quad -1 < \tanh x < 1 \quad (2.9)$$

となり, 三角関数の $\cos x$, $\sin x$, $\tan x$ の値域とは大きく異なり, また, 周期性も持たない. 双曲線関数も三角関数の加法定理に類似した次の定理が成立する.

命題 2.2. 双曲線関数 $\cosh x$, $\sinh x$, $\tanh x$ に関する加法定理

$$\begin{aligned} \cosh(\alpha + \beta) &= \cosh \alpha \cosh \beta + \sinh \alpha \sinh \beta \\ \sinh(\alpha + \beta) &= \sinh \alpha \cosh \beta + \cosh \alpha \sinh \beta \\ \tanh(\alpha + \beta) &= \frac{\tanh \alpha + \tanh \beta}{1 + \tanh \alpha \tanh \beta} \end{aligned} \quad (2.10)$$

が成立する.

[証明] (2.3)より, $e^{\alpha+\beta} = \cosh(\alpha + \beta) + \sinh(\alpha + \beta)$ となる. 一方, $e^{\alpha+\beta} = e^\alpha e^\beta = (\cosh \alpha + \sinh \alpha)(\cosh \beta + \sinh \beta) = (\cosh \alpha \cosh \beta + \sinh \alpha \sinh \beta) +$

$$\begin{aligned} &(\sinh \alpha \cosh \beta + \cosh \alpha \sinh \beta) \text{ となり, 両者は等しいから} \\ &\cosh(\alpha + \beta) + \sinh(\alpha + \beta) \\ &= (\cosh \alpha \cosh \beta + \sinh \alpha \sinh \beta) \\ &+ (\sinh \alpha \cosh \beta + \cosh \alpha \sinh \beta) \end{aligned} \quad (2.11)$$

が得られる. (2.11)の右辺については, 第 1 項目は偶関数, 第 2 項目は奇関数になるように整理してある. ここで, (2.11)の α を $-\alpha$ に β を $-\beta$ にそれぞれ置き換えると, 第 1 項目は偶関数のため変わらず, 第 2 項目は奇関数のため符号のみ変わるから,

$$\begin{aligned} &\cosh(\alpha + \beta) - \sinh(\alpha + \beta) \\ &= (\cosh \alpha \cosh \beta + \sinh \alpha \sinh \beta) \\ &- (\sinh \alpha \cosh \beta + \cosh \alpha \sinh \beta) \end{aligned} \quad (2.12)$$

となる. このとき, (2.11)と(2.12)を足して 2 で割ると, \cosh の加法定理が得られ, (2.11)から(2.12)を引いて 2 で割ると, \sinh の加法定理が得られ, \cosh と \sinh の加法定理から \tanh の加法定理が得られる. (証明終)

三角関数の加法定理は, 複素変数についても成立することが知られているので, (2.8)の関係式と三角関数の加法定理を用いて, (2.10)の双曲線に関する加法定理を導くこともできる. **命題 2.2**より, ただちに次の倍角の公式が得られる.

系 2.1. 双曲線関数 $\cosh x$, $\sinh x$, $\tanh x$ に関する倍角の公式

$$\begin{aligned}\cosh 2x &= \cosh^2 x + \sinh^2 x \\ &= 2 \cosh^2 x - 1 = 2 \sinh^2 x + 1 \\ \sinh 2x &= 2 \sinh x \cosh x \\ \tanh 2x &= \frac{2 \tanh x}{1 + \tanh^2 x}\end{aligned}\quad (2.13)$$

が成立する.

(2.13)の \cosh の倍角の公式から, 半角の公式が得られる.

系 2.2. 双曲線関数 $\cosh x$, $\sinh x$, $\tanh x$ に関する半角の公式

$$\begin{aligned}\cosh^2 \frac{x}{2} &= \frac{1}{2}(\cosh x + 1) \\ \sinh^2 \frac{x}{2} &= \frac{1}{2}(\cosh x - 1) \\ \tanh^2 \frac{x}{2} &= \frac{\cosh x - 1}{\cosh x + 1}\end{aligned}\quad (2.14)$$

が成立する.

x を実変数, n を整数としたとき, 三角関数について, ド・モアブルの公式

$$(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx$$

が知られるが, 双曲線関数についても, (2.3)よりド・モアブルの公式と類似の結果が得られる. すなわち, x を実変数, α を実数としたとき,

$$\begin{aligned}(\cosh x + \sinh x)^\alpha &= (e^x)^\alpha = e^{\alpha x} \\ &= \cosh \alpha x + \sinh \alpha x\end{aligned}\quad (2.15)$$

が成り立つ. 例えば, (2.15)において, $\alpha = 3$ とすると,

$$(\cosh x + \sinh x)^3 = \cosh 3x + \sinh 3x$$

より, 左辺を展開して, 第1項目は偶関数, 第2項目は奇関数となるように整理して, これらの和で表すと,

$$\begin{aligned}(\cosh x + \sinh x)^3 &= (\cosh^3 x + 3 \cosh x \sinh^2 x) \\ &\quad + (3 \cosh^2 x \sinh x + \sinh^3 x)\end{aligned}$$

となるから, **命題 2.1** の偶関数, 奇関数の一意性より, 両辺の偶関数の項と奇関数の項を比較すれば, 三倍角の公式

$$\begin{aligned}\cosh 3x &= \cosh^3 x + 3 \cosh x \sinh^2 x \\ &= 4 \cosh^3 x - 3 \cosh x \\ \sinh 3x &= 3 \cosh^2 x \sinh x + \sinh^3 x \\ &= 4 \sinh^3 x + 3 \sinh x\end{aligned}\quad (2.16)$$

が得られる.

3. 逆双曲線関数

双曲余弦関数 $y = \cosh x (x \geq 0)$ の逆関数 $x = \cosh y (y \geq 0)$ を記号で $y = \cosh^{-1} x$ と表すことにする. 他の双曲線関数の逆関数も同様に表す.

$y = \cosh^{-1} x$ を x の式で表してみよう. $x = \cosh y$ として, (2.9)より, 定義域は $x \geq 1$ となる. また, (2.5)より,

$\sinh^2 y = \cosh^2 y - 1$ となり, $x = \cosh y$ を代入すると, $\sinh^2 y = x^2 - 1$ となる. ここで, $y \geq 0$ より, $\sinh y \geq 0$ となるから, $\sinh y = \sqrt{x^2 - 1}$ となる. これと $\cosh y = x$ より, (2.3)を用いると, $e^y = \cosh y + \sinh y = x + \sqrt{x^2 - 1}$ より

$$y = \cosh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \quad (x \geq 1) \quad (3.1)$$

と表される. 同様にして, $y = \sinh x$ の逆関数 $y = \sinh^{-1} x$ と $y = \tanh x$ の逆関数 $y = \tanh^{-1} x (|x| < 1)$ も x の式で表してみる. まず, $y = \sinh^{-1} x$ は, $\sinh y = x$ として, (2.5) および $\cosh y \geq 1$ より, $\cosh y =$

$\sqrt{\sinh^2 y + 1} = \sqrt{x^2 + 1}$ となる. よって, (2.3)より, $e^y =$

$\cosh y + \sinh y = \sqrt{x^2 + 1} + x$ となり,

$$y = \sinh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \quad (3.2)$$

と表される. $y = \tanh^{-1} x (|x| < 1)$ についても, $\tanh y = x$ として, (2.6) および $\cosh y \geq 1$ より, $\cosh y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ とな

る. また, $\sinh y = \tanh y \cosh y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ より, $e^y =$

$\cosh y + \sinh y = \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ となり,

$$y = \tanh^{-1} x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \quad (|x| < 1) \quad (3.3)$$

と表される. 次に, $y = \cosh^{-1} x$, $y = \sinh^{-1} x$, $y = \tanh^{-1} x$ のグラフを Fig.2 に示す.

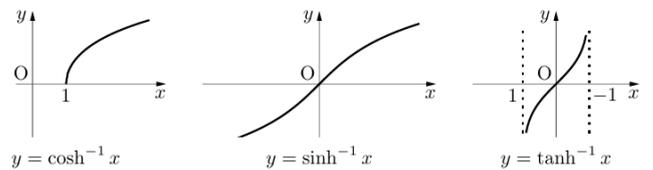


Fig.2 Graph of $y = \cosh^{-1} x$, $y = \sinh^{-1} x$, $y = \tanh^{-1} x$

双曲線関数の逆関数は, 前に ar を追記して, $\operatorname{arcosh} x$, $\operatorname{arsinh} x$, $\operatorname{artanh} x$ とも表記される. ar は area (エリア) の略で, Fig.3 に示す面積 S に対応している[1].

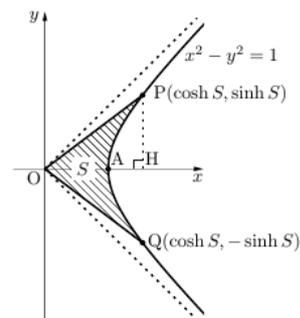


Fig.3 The argument S of the hyperbolic function corresponds to the area S of the figure.

ここで、双曲線関数の逆関数の表記法 ar に対して、三角関数の逆関数の場合は、前に arc (アーク) を追記して、 $\operatorname{arccos}x$, $\operatorname{arcsin}x$, $\operatorname{arctan}x$ と表記されるが、 arc (アーク) は弧度法の角を意味し、双曲線関数の逆関数で使う ar (エリア) と混同しないように注意する. Fig.3 において、双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ の第 1 象限上の点 P の座標を $P(a, b)$ として、 a , b がそれぞれ双曲線関数と面積 S を用いて、 $a = \cosh S$, $b = \sinh S$ と表されることを示す. $A(1, 0)$, $H(a, 0)$, $P(a, b)$ より、斜線部の図形を x 軸によって 2 等分したときの第 1 象限側の面積 $\frac{S}{2}$ は、 $\triangle OHP$ から

$$\frac{S}{2} = \frac{1}{2}ab - \int_1^a \sqrt{x^2 - 1} dx \quad (3.4)$$

と表される. 右辺第 2 項の定積分の計算法については、4 章の例 4.2 で示すが、右辺を計算すると、 $\frac{1}{2} \ln(a + b)$ となり、これと左辺を比較すると、 $S = \ln(a + b)$ すなわち、 $a + b = e^S$ となる. 一方、点 $P(a, b)$ は双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ 上の点であったから、 $a^2 - b^2 = 1$ より、 $(a + b)(a - b) = 1$ となり、したがって、 $a - b = (a + b)^{-1} = e^{-S}$ となる. よって、この 2 つを足して 2 で割ると、 $a = \cosh S$ が得られ、引いて 2 で割ると、 $b = \sinh S$ が得られる.

4. 置換積分への応用

まず、双曲線関数の微分法と積分法に関する基本公式を示しておく. まず、 $\cosh x$, $\sinh x$, $\tanh x$ の導関数については、

$$\begin{aligned} (\cosh x)' &= \frac{1}{2}(e^x + e^x)' \\ &= \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \sinh x \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} (\sinh x)' &= \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})' \\ &= \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \cosh x \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} (\tanh x)' &= \left(\frac{\sinh x}{\cosh x} \right)' \\ &= \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \operatorname{sech}^2 x \end{aligned} \quad (4.3)$$

となる.

同様に、 $(\operatorname{sech} x)' = -\operatorname{sech} x \tanh x$, $(\operatorname{csch} x)' = -\operatorname{csch} x \coth x$, $(\coth x)' = -\operatorname{csch}^2 x$ も示される. 逆三角関数 $\cosh^{-1} x$, $\sinh^{-1} x$, $\tanh^{-1} x$ の導関数については、(4.1)~(4.3) と双曲線関数の相互関係(2.5), (2.6) を用いると、

$$\begin{aligned} y = \cosh^{-1} x &\Leftrightarrow x = \cosh y \quad (y \geq 0) \\ y' = (\cosh^{-1} x)' &= \frac{1}{dx/dy} = \frac{1}{\sinh y} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\cosh^2 y - 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} y = \sinh^{-1} x &\Leftrightarrow x = \sinh y \\ y' = (\sinh^{-1} x)' &= \frac{1}{dx/dy} = \frac{1}{\cosh y} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\sinh^2 y + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} y = \tanh^{-1} x &\Leftrightarrow x = \tanh y \\ y' = (\tanh^{-1} x)' &= \frac{1}{dx/dy} = \frac{1}{\operatorname{sech}^2 y} \\ &= \frac{1}{1 - \tanh^2 y} = \frac{1}{1 - x^2} \end{aligned} \quad (4.6)$$

となる. (4.1)~(4.6) から直ちに原始関数の基本公式も得られる.

$$\int \cosh x dx = \sinh x + C \quad (4.7)$$

$$\int \sinh x dx = \cosh x + C \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} \int \tanh x dx &= \int \frac{\sinh x}{\cosh x} dx \\ &= \int \frac{(\cosh x)'}{\cosh x} dx \\ &= \ln \cosh x + C \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} dx = \cosh^{-1} x + C \quad (x > 1) \quad (4.10)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = \sinh^{-1} x + C \quad (4.11)$$

$$\int \frac{1}{1 - x^2} dx = \tanh^{-1} x + C \quad (|x| < 1) \quad (4.12)$$

特に、(4.10) と (4.12) については、原始関数を表している右辺の逆双曲線関数の定義域が制限されているため、左辺の被積分関数の定義域より狭くなっていることに注意する. (4.10) の左辺の不定積分において、 $x < -1$ の場合を求めるときは、 $-x > 1$ として、(4.10) を用いると、

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} dx = \int \frac{-(-x)'}{\sqrt{(-x)^2 - 1}} dx = -\cosh^{-1}(-x) + C$$
 となる. このように、 $x > 1$ のときと $x < -1$ のときで、場合分けせずに原始関数を表すためには、(3.1) を用いる.

すなわち、 $x > 1$ のときは、 $\cosh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$ であるが、 $x < -1$ すなわち、 $-x > 1$ のときは、

$$\begin{aligned} -\cosh^{-1}(-x) &= -\ln(-x + \sqrt{(-x)^2 - 1}) \\ &= \ln \frac{1}{-x + \sqrt{x^2 - 1}} = \ln(-x - \sqrt{x^2 - 1}) \end{aligned}$$

となるから、(4.10) は絶対値と対数を用いて、

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} dx = \ln|x + \sqrt{x^2 - 1}| + C$$

と一つにまとめることができる。

(4.12)の左辺の不定積分も同様に、 $|x| > 1$ の場合を求めるときは、 $|x^{-1}| < 1$ として、(4.12)を用いると、

$$\int \frac{1}{1-x^2} dx = \int \frac{-x^{-2}}{1-(x^{-1})^2} dx = \int \frac{(x^{-1})'}{1-(x^{-1})^2} dx = \tanh^{-1}(x^{-1}) + C$$

となる。場合分けせずに表すためには、(3.3)を用いる。

すなわち、 $|x| < 1$ のときは、 $\tanh^{-1} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$ となり、

$|x| > 1$ すなわち、 $|x^{-1}| < 1$ のときは、

$$\tanh^{-1}(x^{-1}) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x^{-1}}{1-x^{-1}} = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}$$

となる。したがって、絶対値と対数を用いて

$$\int \frac{1}{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C$$

と表すことができる。したがって、(4.10)と(4.12)については、定積分のように積分区間がはっきりわかっているときは、逆双曲線関数を用いて簡潔に表されるが、そうでない場合は、対数関数を用いて表すと良い。

次に、双曲線関数を置換積分に応用してみよう。変数 X, Y の有理関数を $R(X, Y)$ として、いくつかの積分を考える。

(1) $\int R(x, \sqrt{x^2+a^2}) dx \quad (a > 0)$

$y = \sqrt{x^2+a^2}$ とおけば、 (x, y) は双曲線 $y^2 - x^2 = a^2$ ($y \geq a$)上の点となる。双曲線関数を用いて、 $y = a \cosh t$, $x = a \sinh t$ とすると、 $\frac{dx}{dt} = a \cosh t \geq 0$ より、 $x = a \sinh t$ は単調増加関数で、 $dx = a \cosh t dt$ となる。したがって、

$$\begin{aligned} & \int R(x, \sqrt{x^2+a^2}) dx \\ & x = a \sinh t, y = \sqrt{x^2+a^2} = a \cosh t \quad (4.13) \\ & \Rightarrow \int R(a \sinh t, a \cosh t) a \cosh t dt \end{aligned}$$

となる。

例 4.1. $I = \int \frac{1}{x^2 \sqrt{x^2+4}} dx$

$y = \sqrt{x^2+4}$ とおくと、 $y^2 - x^2 = 4$ となるから、 $y = 2 \cosh t, x = 2 \sinh t$ とすると、 $dx = 2 \cosh t dt$ より、

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{4 \sinh^2 t} dt = \frac{1}{4} (-\coth t) + C = -\frac{\cosh t}{4 \sinh t} + C \\ &= -\frac{y}{4x} + C = -\frac{\sqrt{x^2+4}}{4x} + C \end{aligned}$$

が求まる。

(2) $\int R(x, \sqrt{x^2-a^2}) dx \quad (a > 0)$

$y = \sqrt{x^2-a^2}$ とおけば、 (x, y) は双曲線 $x^2 - y^2 =$

a^2 ($y \geq 0$)上の点となる。ここで、 $|x| \geq a$ であるから、 $x \geq a$ の場合と $x \leq -a$ の場合が考えられる。したがって、 $x \geq a$ の場合は $x = a \cosh t$, $x \leq -a$ の場合は $x = -a \cosh t$ とし、 $y = a \sinh t$ ($t \geq 0$)と媒介変数表示する。

このとき、 $\frac{dx}{dt} = \pm a \sinh t$ より、 $x = \pm a \cosh t$ は $t \geq 0$ で

それぞれ単調増加関数で、 $dx = \pm a \sinh t dt$ となる。したがって、

$$\begin{aligned} & \int R(x, \sqrt{x^2-a^2}) dx \\ & x = \pm a \cosh t, y = \sqrt{x^2-a^2} = a \sinh t \quad (4.14) \\ & \Rightarrow \int R(\pm a \cosh t, a \sinh t) (\pm a \sinh t) dt \end{aligned}$$

となる。ただし、符号は複号同順で、 $x \geq a$ のとき+、 $x \leq -a$ のとき、-をとる。

例 4.2. 前述の Fig.3 の斜線部の面積の計算過程で

現れた(3.4)右辺第 2 項の定積分 $\int_1^a \sqrt{x^2-1} dx$ の計算

方法を示そう。 $y = \sqrt{x^2-1}$ ($x \geq 1$)とおくと、 $x^2 - y^2 = 1$ となるから、 $x = \cosh t, y = \sinh t$ ($t \geq 0$)とすると、 $dx = \sinh t dt$ となる。また、積分範囲については、 x が $1 \rightarrow a$ のとき、 t は $0 \rightarrow \ln(a+b)$ となるから、

$$\begin{aligned} \int_1^a \sqrt{x^2-1} dx &= \int_0^{\ln(a+b)} \sinh^2 t dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\ln(a+b)} (\cosh 2t - 1) dt \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \sinh 2t - t \right]_0^{\ln(a+b)} \\ &= \frac{1}{8} \{ (a+b)^2 - (a+b)^{-2} \} - \frac{1}{2} \ln(a+b) \end{aligned}$$

となる。ここで、 $a^2 - b^2 = 1$ より、 $(a+b)^{-1} = a-b$ となるから、 $(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$ より、 $\int_1^a \sqrt{x^2-1} dx =$

$\frac{1}{2} ab - \frac{1}{2} \ln(a+b)$ が求まる。これを(3.4)右辺第 2 項に

代入すると、(3.4)右辺は $\frac{1}{2} \ln(a+b)$ となる。

(3) $\int R(x, \sqrt{x^2+A}) dx \quad (A \neq 0)$

$y = \sqrt{x^2+A}$ とおけば、 (x, y) は双曲線 $y^2 - x^2 = A$ ($y \geq 0$)上の点となるが、 $A > 0$ の場合は(1)、 $A < 0$ の場合は(2)で対応できる。ここでは、 A の正負で場合分けをせず、双曲線関数を使わない置換積分法を示す。 $y^2 - x^2 = (y+x)(y-x) = A$ より、 $y+x = t$ とおくと、 $y-x = At^{-1}$ となる。この 2 つより、 $y = \frac{1}{2}(t + At^{-1})$, $x =$

$\frac{1}{2}(t - At^{-1})$ が得られ、 $dx = \frac{1}{2}(1 + At^{-2})dt$ となる。した

がって、

$$\int R(x, \sqrt{x^2 + A}) dx$$

$$x = \frac{t - At^{-1}}{2}, y = \sqrt{x^2 + A} = \frac{t + At^{-1}}{2} \quad (4.15)$$

$$\Rightarrow \int R\left(\frac{t - At^{-1}}{2}, \frac{t + At^{-1}}{2}\right) \frac{1 + At^{-2}}{2} dt$$

となる。

例 4.3. $I = \int \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x^2} dx$

$y = \sqrt{x^2 - 1}$ とおくと、 $x^2 - y^2 = 1$ より、 $x + y = t$ とおくと、 $x - y = t^{-1}$ となり、この2つから、 $x = \frac{1}{2}(t + t^{-1})$ 、 $y = \frac{1}{2}(t - t^{-1})$ が得られる。このとき、 $dx = \frac{1}{2}(1 - t^{-2})dt = yt^{-1}dt$ より、

$$I = \int \frac{y^2 t^{-1}}{x^2} dt = \int \frac{(t^2 - 1)^2}{t(t^2 + 1)^2} dt$$

$$= \int \left\{ \frac{1}{t} - \frac{4t}{(t^2 + 1)^2} \right\} dt = \ln|t| + \frac{2}{t^2 + 1} + C$$

$$= \ln|x + y| + \frac{2}{(x + y)^2 + 1} + C$$

$$= \ln \left| x + \sqrt{x^2 - 1} \right| + \frac{1}{x(x + \sqrt{x^2 - 1})} + C$$

$$= \ln \left| x + \sqrt{x^2 - 1} \right| + \frac{x - \sqrt{x^2 - 1}}{x} + C$$

$$= \ln \left| x + \sqrt{x^2 - 1} \right| - \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} + C' \quad (C' = C + 1)$$

が求まる。

(4) $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx \quad (a > 0, b^2 - 4ac \neq 0)$

根号の中を $ax^2 + bx + c = a(x - p)^2 + q \quad (q \neq 0)$ と変形して、 $u = \sqrt{a}(x - p)$ とおけば、 $x = p + \frac{u}{\sqrt{a}}$ 、 $ax^2 + bx + c = u^2 + q$ 、 $dx = \frac{1}{\sqrt{a}} du$ より、

$$\int R\left(p + \frac{u}{\sqrt{a}}, \sqrt{u^2 + q}\right) \frac{1}{\sqrt{a}} du \quad (q \neq 0)$$

となり、(3)の形に帰着される。 q の正負に応じて、双曲線関数による置換積分(1)、(2)を用いることも可能である。

例 4.4. $I = \int \frac{1}{\sqrt{x^2 - x + 1}} dx$

$y = \sqrt{x^2 - x + 1}$ とおくと、 $y^2 = x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$ すなわち、 $y^2 - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$ より、 $y =$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \cosh t, x - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \sinh t$$

とおくと、 $dx = \frac{\sqrt{3}}{2} \cosh t dt$ となり、 $I = \int dt = t + C$ が得られる。ここで、 $x - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \sinh t$ より、 $\sinh t = \frac{2x-1}{\sqrt{3}}$ となるから、 $I = \sinh^{-1} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C$ が求まる。

(5) $\int R(\sec x, \tan x) dx$

$1 + \tan^2 x = \sec^2 x$ より、 $\sec^2 x - \tan^2 x = 1$ となるから、 $\sec x + \tan x = t$ とおくと、 $\sec x - \tan x = t^{-1}$ となり、この2つから、 $\sec x = \frac{t+t^{-1}}{2}$ 、 $\tan x = \frac{t-t^{-1}}{2}$ が得られる。また、 $(\sec x \tan x + \sec^2 x) dx = dt$ より、 $dx = \frac{1}{\sec x(\tan x + \sec x)} dt = \frac{2}{t^2 + 1} dt$ から

$$\int R(\sec x, \tan x) dx$$

$$\sec x + \tan x = t$$

$$\Rightarrow \int R\left(\frac{t + t^{-1}}{2}, \frac{t - t^{-1}}{2}\right) \frac{2}{t^2 + 1} dt \quad (4.16)$$

となる。

一方、よく知られている $\int R(\cos x, \sin x) dx$ の形の積分は、 $\tan \frac{x}{2} = t$ と置くと、 $\int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right) \frac{2}{1+t^2} dt$ となり、 t の有理関数の積分に帰着され[2]、ワイエルストラス置換ともよばれる。この形の積分は、 $\cos x = \frac{1}{\sec x}$ 、 $\sin x = \cos x \tan x = \frac{\tan x}{\sec x}$ より、 $\int R(\sec x, \tan x) dx$ の形に帰着して求めることもできる。

例 4.5. $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^3 x dx$

$\sec^2 x - \tan^2 x = 1$ より、 $\sec x + \tan x = t$ とおくと、 $\sec x - \tan x = t^{-1}$ で、 $\sec x = \frac{t+t^{-1}}{2}$ 、 $(\sec x \tan x + \sec^2 x) dx = dt$ すなわち、 $\sec x dx = t^{-1} dt$ となる。また、積分範囲については、 x が $0 \rightarrow \frac{\pi}{4}$ のとき、 t は $1 \rightarrow 1 + \sqrt{2}$ となるから、

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^3 x dx = \int_1^{1+\sqrt{2}} \left(\frac{t + t^{-1}}{2}\right)^2 t^{-1} dt$$

$$= \frac{1}{4} \int_1^{1+\sqrt{2}} (t + t^{-3} + 2t^{-1}) dt$$

$$= \frac{1}{4} \left[\frac{1}{2} t^2 - \frac{1}{2} t^{-2} + 2 \ln t \right]_1^{1+\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{2} \{ \sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2}) \}$$

が求まる.

双曲線関数を用いた別解も示しておこう. $\sec x = \cosh t$, $\tan x = \sinh t$ とすると, $\sec x + \tan x = e^t$ すなわち, $\ln(\sec x + \tan x) = t$ となる. このとき,

$$\frac{\sec x \tan x + \sec^2 x}{\sec x + \tan x} dx = dt \quad \text{すなわち, } \sec x dx = dt \text{ となる.}$$

また, 積分範囲については, x が $0 \rightarrow \frac{\pi}{4}$ のとき, t は $0 \rightarrow \ln(1 + \sqrt{2})$ となるから,

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^3 x dx = \int_0^{\ln(1+\sqrt{2})} \cosh^2 t dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\ln(1+\sqrt{2})} (\cosh 2t + 1) dt = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \sinh 2t + t \right]_0^{\ln(1+\sqrt{2})}$$

ここで, $t = \ln(1 + \sqrt{2})$ のとき, $e^t = 1 + \sqrt{2}$, $e^{-t} = \frac{1}{1 + \sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1$ であるから, $\sinh 2t = \frac{e^{2t} - e^{-2t}}{2} = \frac{(1 + \sqrt{2})^2 - (\sqrt{2} - 1)^2}{2} = 2\sqrt{2}$ となる. したがって, $I = \frac{1}{2} \{ \sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2}) \}$ が求まる.

(6) $\int R(\cosh x, \sinh x) dx$

前述のワイエルストラス置換と同様に, $\tanh \frac{x}{2} = t$ と

置くと, $\frac{1}{2} \operatorname{sech}^2 \frac{x}{2} dx = dt$ すなわち, $dx = \frac{2}{1-t^2} dt$ となる.

$$\text{また, } \cosh x = \frac{\cosh^2 \frac{x}{2} + \sinh^2 \frac{x}{2}}{\cosh^2 \frac{x}{2} - \sinh^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 + \tanh^2 \frac{x}{2}}{1 - \tanh^2 \frac{x}{2}} = \frac{1+t^2}{1-t^2}, \quad \sinh x =$$

$$\frac{2 \sinh \frac{x}{2} \cosh \frac{x}{2}}{\cosh^2 \frac{x}{2} - \sinh^2 \frac{x}{2}} = \frac{2 \tanh \frac{x}{2}}{1 - \tanh^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1-t^2} \text{ より,}$$

$$\int R(\cosh x, \sinh x) dx$$

$$\tanh \frac{x}{2} = t \quad (4.17)$$

$$\Rightarrow \int R \left(\frac{1+t^2}{1-t^2}, \frac{2t}{1-t^2} \right) \frac{2}{1-t^2} dt$$

となり, t の有理関数の積分に帰着される.

別の方法として, 双曲線関数が指数関数 e^x を用いて定義されていることから, $e^x = t$ と置くと, $e^x dx = dt$

すなわち, $dx = \frac{dt}{t}$ となる. また, $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{t + t^{-1}}{2}$,

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{t - t^{-1}}{2} \text{ より,}$$

$$\int R(\cosh x, \sinh x) dx$$

$$e^x = t \quad (4.18)$$

$$\Rightarrow \int R \left(\frac{t + t^{-1}}{2}, \frac{t - t^{-1}}{2} \right) \frac{1}{t} dt$$

となる.

例 4.6. $I = \int \frac{1}{2 \cosh x + \sinh x} dx$

$e^x = t$ とおくと, $e^x dx = dt$ すなわち, $dx = \frac{dt}{t}$ と

$\cosh x = \frac{t + t^{-1}}{2}$, $\sinh x = \frac{t - t^{-1}}{2}$ より,

$$I = \int \frac{1}{t + t^{-1} + \frac{t - t^{-1}}{2}} \frac{1}{t} dt = \int \frac{2}{3t^2 + 1} dt$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \sqrt{3} t + C = \frac{2}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \sqrt{3} e^x + C$$

が求まる.

(7) $\int \frac{1}{a^2 - x^2} dx \quad (a > 0)$

$\frac{1}{a^2 - x^2} = \frac{1}{(a+x)(a-x)} = \frac{1}{2a} \left\{ \frac{1}{a+x} + \frac{1}{a-x} \right\}$ と部分分数分解す

ると, $\int \frac{1}{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C$ が得られるが, ここでは,

双曲線関数を用いた置換積分を示す.

(i) $a^2 - x^2 > 0$ すなわち, $|x| < a$ のとき

(2.9)より, $|\tanh t| < 1$ であるから, $x = a \tanh t$ とおくと, $|x| < a$ となり, また, $a^2 - x^2 = a^2(1 - \tanh^2 t) = a^2 \operatorname{sech}^2 t$, $dx = a \operatorname{sech}^2 t dt$ より,

$$\int \frac{1}{a^2 - x^2} dx = \int \frac{1}{a} dt = \frac{1}{a} t + C \quad (4.19)$$

$$= \frac{1}{a} \tanh^{-1} \frac{x}{a} + C$$

が得られる.

(ii) $a^2 - x^2 < 0$ すなわち, $|x| > a$ のとき

(2.9)より, $|\tanh t| < 1$ であるから, $|\coth t| > 1$ となる. ここで, $x = a \coth t$ とおくと, $|x| > a$ となり, また, $a^2 - x^2 = a^2(1 - \coth^2 t) = -a^2 \operatorname{csch}^2 t$, $dx = -a \operatorname{csch}^2 t dt$ より,

$$\int \frac{1}{a^2 - x^2} dx = \int \frac{1}{a} dt = \frac{1}{a} t + C \quad (4.20)$$

$$= \frac{1}{a} \coth^{-1} \frac{x}{a} + C$$

が得られる.

別解として, $\frac{1}{a^2 - x^2} = \frac{-x^{-2}}{1 - a^2 x^{-2}}$ と変形し, $ax^{-1} = \tanh t$ と

おくと, $|ax^{-1}| < 1$ すなわち, $|x| > a$ となり, また, $1 - a^2 x^{-2} = 1 - \tanh^2 t = \operatorname{sech}^2 t$, $-ax^{-2} dx = \operatorname{sech}^2 t dt$ より,

$$\int \frac{1}{a^2 - x^2} dx = \int \frac{-x^{-2}}{1 - a^2 x^{-2}} dx = \int \frac{1}{a} dt \quad (4.21)$$

$$= \frac{1}{a} t + C = \frac{1}{a} \tanh^{-1} \frac{a}{x} + C$$

が得られる. ここで, $ax^{-1} = \tanh t$ から, $t = \tanh^{-1} \frac{a}{x}$

となり, 一方, $\coth t = \frac{x}{a}$ から, $t = \coth^{-1} \frac{x}{a}$ となるから,

$\coth^{-1} \frac{x}{a} = \tanh^{-1} \frac{a}{x}$ となり, (4.20) と (4.21) は一致する.

例 4.7. $I = \int_0^1 \frac{1}{2-x^2} dx$

積分区間 $0 \leq x \leq 1$ において, $2 - x^2 > 0$ となるから, $x = \sqrt{2} \tanh t$ とおくと, $2 - x^2 = 2 \operatorname{sech}^2 t$ で, $dx = \sqrt{2} \operatorname{sech}^2 t dt$ となる. また, 積分範囲については, x が $0 \rightarrow 1$ のとき, t は $0 \rightarrow \tanh^{-1} \frac{1}{\sqrt{2}}$ となるから,

$$I = \int_0^1 \frac{1}{2-x^2} dx = \int_0^{\tanh^{-1} \frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{\sqrt{2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2}} \tanh^{-1} \frac{1}{\sqrt{2}}$$

が求まる.

例 4.8. $I = \int_2^3 \frac{1}{x^2-1} dx$

積分区間 $2 \leq x \leq 3$ において, $x^2 - 1 > 0$ となるから, $x = \coth t$ とおくと, $x^2 - 1 = \operatorname{csch}^2 t$ で, $dx = -\operatorname{csch}^2 t dt$ となる. また, 積分範囲については, x が $2 \rightarrow 3$ のとき, t は $\coth^{-1} 2 \rightarrow \coth^{-1} 3$ となるから,

$$I = \int_2^3 \frac{1}{x^2-1} dx = - \int_{\coth^{-1} 2}^{\coth^{-1} 3} dt = \coth^{-1} 2 - \coth^{-1} 3$$

が求まる. ここで, $\alpha = \coth^{-1} 2$, $\beta = \coth^{-1} 3$ とおくと,

$\coth \alpha = 2$, $\coth \beta = 3$ すなわち, $\tanh \alpha = \frac{1}{2}$, $\tanh \beta = \frac{1}{3}$ となるから, (2.10) の \tanh の加法定理の公式を用いると,

$$\tanh(\alpha - \beta) = \frac{\tanh \alpha + \tanh(-\beta)}{1 + \tanh \alpha \tanh(-\beta)} = \frac{\frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{3}\right)}{1 + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{1}{5}$$

より, $\alpha - \beta = \tanh^{-1} \frac{1}{5} = \coth^{-1} 5$ すなわち, $I = \coth^{-1} 5$

と簡潔に表される.

5. おわりに

本論文では, 大学の教科書でも触れる程度であり馴染みのない双曲線関数について解説した. 具体的には, 原点对称区間で定義された任意の関数は, 偶関数と奇関数の和で一意的に表されることを利用し, 特に, 指数関数 e^x を偶関数と奇関数で表したときの偶関数が $\cosh x$, 奇関数が $\sinh x$ となることを示した. また,

偶関数と奇関数の性質を用いると, $(X, Y) = (\cosh t, \sinh t)$ が双曲線 $X^2 - Y^2 = 1$ の媒介変数表示になっていることと, 三角関数と類似の加法定理も成立することを示した. また, 双曲線の媒介変数表示を利用して, いくつかの形の積分に対する置換積分法について解説し, 具体例もいくつか示した.

参考文献

- [1] 高木貞治, "解析概論", 岩波書店, 東京, 1985.
- [2] 中井三留, "微分法と積分法", 学術図書出版社, 東京, 2000.

加速度運動をする荷電粒子の電磁ポテンシャルと電磁場の各種表式

石川 雄二郎*, 石川 知之**

(2025年8月8日受理)

Electromagnetic Potentials and Fields of a Charged Particle in Accelerated Motion

Yujiro ISHIKAWA* and Tomoyuki ISHIKAWA**

(Received August 8, 2025)

Abstract

Lienard and Wiechert separately calculated electromagnetic potentials for a charged particle in accelerated motion and resultant potentials are called the Lienard-Wiechert potentials. Lienard and other scientists such as Heaviside and Feynman showed formulae to calculate the electromagnetic field of this moving charged particle. However, it is quite difficult to understand that their formulae give the same electromagnetic field because their formulae have their own specialized forms, respectively. Therefore, we first proved that their formulae are equivalent by using modern vector calculus. Then, we apply their formulae to the case of a charged particle in circular motion with constant angular speed and get our formulae to calculate the electromagnetic field. Finally, we compute numerically the electromagnetic field at a point on the central axis by using our formulae.

キーワード: リエナール・ヴィーヒェルト, 電磁ポテンシャル, 電磁場

Keywords : Lienard-Wiechert, Electromagnetic potentials, Electromagnetic Fields

1. はじめに

荷電粒子が与えられた軌道に沿って加速度運動をしているときの電磁ポテンシャル(スカラーポテンシャルとベクトルポテンシャル)は, Lienard と Wiechert がそれぞれ独立に 1898 年と 1900 年に導いたので, Lienard-Wiechert ポテンシャルとよばれる[1]. 運動する荷電粒子が観測点につくる電磁場は, 現在の時刻に軌道上を運動する荷電粒子からの電磁的な信号ではない. 荷電粒子からの電磁的な信号は光速で伝わるが, 観測点に到達するまでには時間がかかる. すなわち観測点に電磁場をつくるのは, 現在の時刻より前に荷電粒子を出発した電磁的な信号で, ちょうど現在の時刻に観測点に到達する位置を運動していた, 荷電粒子からの電磁的な信号である. この電磁的な信号が荷電粒子を出発した時刻(遅延時刻)を求める方程式は一般的には解けない. そのため陽表現を持たない遅延時刻を用いた数式で電磁気現象を表すことになる. この状況が電磁場に関連する表式を煩雑にしている.

荷電粒子が与えられた軌道に沿って運動しているときにつくる電磁場は Lienard-Wiechert ポテンシャルに基づいて計算できる. 電磁場の表式は Lienard, Feynman および Heaviside 等により得られている[1,2]. それぞれの電磁場の表式の体裁は異なり, 各表式が同一の電磁場を表すことは直ぐには理解できない. そこで本文では, これらの表式を導出し全ての表式は同一の電磁場を表すことを確認する.

2. 加速度運動をする荷電粒子の Lienard-Wiechert ポテンシャル

時間を t , 観測点の位置を $\mathbf{x} = (x, y, z)$, 荷電粒子の電荷量と軌道をそれぞれ q と $\mathbf{z}(t)$ で表す. 時刻 t における観測点 \mathbf{x} におけるスカラーポテンシャル $\phi(\mathbf{x}, t)$ とベクトルポテンシャル $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ は, 遅延時刻 t' に軌道上 $\mathbf{z}(t')$ を運動していた粒子からの, 光速 c で伝わる電磁的な信号により構成される(図 1 参照). $\mathbf{z}(t')$ は遅延時刻 t' における粒子の位置, $\mathbf{z}(t)$ は現在の時刻 t に

* 愛知工科大学工学部情報メディア学科, 定年退職, 〒443-0047 愛知県蒲郡市西迫町馬乗 50-2

Department of Media Informatics, Aichi University of Technology, 50-2, Manori, Gamagori, Aichi 443-0047, Japan

** 株式会社アビリカ, 〒101-0038 東京都千代田区神田美倉町 12 番地 2 三和ビル

abilica, 12-2, Kanda Mikura-cho, Chiyoda-ku, Tokyo 101-0038, Japan

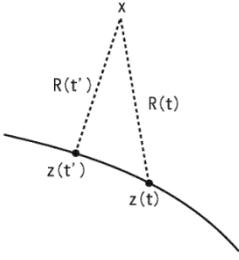


Fig.1 A charged Particle in accelerated motion

る粒子の位置である． $\mathbf{R}(t) = \mathbf{x} - \mathbf{z}(t)$ とおくと遅延時刻 t' は

$$t' = t - \frac{R(t')}{c} = t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{z}(t')|}{c} \quad (2.1)$$

の解である．ここで c は光速である．本文では

$$[R] = R(t') \quad (2.2)$$

のように $[]$ を使って遅延時刻 t' における量を表す Lorentz 記法を用いる．例えば $[R]$ は (位置, 時刻) $= (\mathbf{z}(t'), t')$ に対する R の値である． t' は (2.1) 式の解であるので, $R(t')$ は \mathbf{x} と t に依存している．したがって, 例えば

$$\nabla R(t') = \nabla |\mathbf{x} - \mathbf{z}(t')| = \frac{\mathbf{R}(t')}{R(t')} - \frac{\mathbf{R}(t') \cdot \mathbf{v}(t')}{R(t')^2} \nabla t'$$

のように微分する．さらに

$$s(t') = R(t') - \frac{\mathbf{R}(t') \cdot \mathbf{v}(t')}{c} \quad (2.3)$$

Lorentz 記法では

$$[s] = [R] - \frac{[\mathbf{R}] \cdot [\mathbf{v}]}{c}$$

を定義する． $[\mathbf{v}]$ は, 時刻 t' に $\mathbf{z}(t')$ を運動する荷電粒子の速度

$$[\mathbf{v}] = \mathbf{v}(t') = \left(\frac{d\mathbf{z}(t')}{dt'} \right)_{t=t'} = [\dot{\mathbf{z}}] \quad (2.4)$$

を表す．

以上の設定 (図 1 参照) において以下の公式

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = \left[\frac{1}{1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}} \right] = \left[\frac{R}{s} \right] \quad (a)$$

$$\nabla t' = - \left[\frac{\mathbf{R}}{cs} \right] \quad (b)$$

$$\nabla [s] = [\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}] - \left[c\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta} - c\beta^2 + \frac{R}{c} \mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{v}} \right] \nabla t' \quad (c)$$

$$\frac{\partial [s]}{\partial t} = - \left[c\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta} - c\beta^2 + \frac{R}{c} \mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{v}} \right] \frac{\partial t'}{\partial t} \quad (d)$$

$$\nabla \times [\mathbf{v}] = \nabla t' \times [\dot{\mathbf{v}}] \quad (e)$$

$$\left[\frac{1}{s} \right] = \left[\frac{1}{R} \right] \left(1 - \frac{1}{c} \frac{\partial [R]}{\partial t} \right) \quad (f)$$

$$[\mathbf{v}] = -[\dot{\mathbf{R}}] = - \left[\frac{s}{R} \right] \frac{\partial [\mathbf{R}]}{\partial t} \quad (g)$$

が成り立つ [1]．ここで $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{v}/c, \mathbf{n} = \mathbf{R}/R$ とおいた．

さらに公式

$$\nabla [s] = [\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}] - \frac{[\mathbf{n}]}{c} \frac{\partial [s]}{\partial t} \quad (h)$$

$$[\dot{\mathbf{v}}] = \frac{\partial [\mathbf{v}]}{\partial t} \left[\frac{s}{R} \right] \quad (i)$$

$$\frac{\partial [R]}{\partial t} = c \left(1 - \left[\frac{R}{s} \right] \right) \quad (j)$$

$$\nabla [R] = \left[\frac{\mathbf{n}R}{s} \right] \quad (k)$$

$$\nabla \left[\frac{1}{R} \right] = - \left[\frac{\mathbf{n}}{sR} \right] \quad (l)$$

$$[\dot{\mathbf{R}}] = c \left(\left[\frac{s}{R} \right] - 1 \right) \quad (m)$$

が成り立つ．

Lienard-Wiechert ポテンシャルは

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{s} \right] \quad (2.5)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \left[\frac{\mathbf{v}}{s} \right] \quad (2.6)$$

である [1]．これより電場の基本表式

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) &= -\nabla \phi(\mathbf{x}, t) - \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\nabla [s]}{[s]^2} - \frac{\mu_0 q}{4\pi} \left(\frac{1}{[s]} \frac{\partial [\mathbf{v}]}{\partial t} - \left[\frac{\mathbf{v}}{s^2} \right] \frac{\partial [s]}{\partial t} \right) \quad (2.7) \end{aligned}$$

が得られる [1]．Lienard-Wiechert ポテンシャルは第 3 章で導出する電磁場の表式の基本式である．

3. Lienard-Wiechert ポテンシャルからの電磁場の各種表式

最初に, (2.7) 式から Lienard による電場の表式

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{R}{s^3} (\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) (1 - \beta^2) \right] \\ &+ \frac{\mu_0 q}{4\pi} \left[\frac{R^2}{s^3} \mathbf{n} \times ((\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\mathbf{v}}) \right] \quad (3.1) \end{aligned}$$

電場と磁場の間に成り立つ表式

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{c} [\mathbf{n}] \times \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \quad (3.2)$$

をベクトル解析を用いて導出する．

荷電粒子が与えられた軌道に沿って運動しているときの電磁場の表式は他にも

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\left[\frac{\mathbf{n}}{sR} \right] + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}}{s} \right] \right) \quad (3.3)$$

Heaviside-Feynman による表式

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\left[\frac{\mathbf{n}}{R^2} \right] + \frac{[R]}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\mathbf{n}}{R^2} \right] + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 [\mathbf{n}]}{\partial t^2} \right) \quad (3.4)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \left(\left[\frac{\mathbf{n}}{R} \right] \times \frac{\partial [\mathbf{n}]}{\partial t} + \frac{1}{c} [\mathbf{n}] \times \frac{\partial^2 [\mathbf{n}]}{\partial t^2} \right) \quad (3.5)$$

が知られている[1]. これらの表式についても同様に導出する.

3.1 Lienard による電場の表式(3.1)の導出

(2.7)式より

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{s^2} \right] \\ &= \left[\frac{\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}}{R} \right] - \left[\frac{\mathbf{cn} \cdot \boldsymbol{\beta} - c\beta^2 + \frac{R}{c} \mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{v}}}{R} \right] \left[\frac{-\mathbf{R}}{cs} \right] \\ &\quad - \frac{\mu_0 q}{4\pi} \left[\frac{1}{s} \frac{\dot{\mathbf{v}}}{s} + \frac{\mathbf{v}}{s^2} \left(\mathbf{cn} \cdot \boldsymbol{\beta} - c\beta^2 + \frac{R}{c} \mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{v}} \right) \frac{R}{s} \right] \quad (3.6) \end{aligned}$$

が得られる. ここで = は式の変形にあたり公式(a)を使ったことを表す.

(3.6)式の $[\dot{\mathbf{v}}]$ を含まない項は

$$\begin{aligned} &\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{R}{s^3} \right] \left[\frac{s}{R} (\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) + (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\beta}) \mathbf{n} \right] \\ &\quad - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{R}{s^3} \boldsymbol{\beta} ((\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \cdot \boldsymbol{\beta}) \right] \\ &\stackrel{(a)}{=} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{R}{s^3} \right] \times \\ &\quad \left[(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) + \mathbf{n}((\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \cdot \boldsymbol{\beta}) - \boldsymbol{\beta}((\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \cdot \boldsymbol{\beta}) \right] \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{R}{s^3} (\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta})(1 - \beta^2) \right] \quad (3.7) \end{aligned}$$

(3.6)式の $[\dot{\mathbf{v}}]$ を含む項は

$$\begin{aligned} &\frac{\mu_0 q}{4\pi} \left[\frac{R^2}{s^3} (\mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{v}}) \mathbf{n} \right] - \frac{\mu_0 q}{4\pi} \left[\frac{R^2}{s^3} \frac{s}{R} \dot{\mathbf{v}} + \frac{R^2}{s^3} (\mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{v}}) \boldsymbol{\beta} \right] \\ &\stackrel{(a)}{=} \frac{\mu_0 q}{4\pi} \left[\frac{R^2}{s^3} \right] \left[(\mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{v}}) \mathbf{n} - (1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}) \dot{\mathbf{v}} - (\mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{v}}) \boldsymbol{\beta} \right] \\ &= \frac{\mu_0 q}{4\pi} \left[\frac{R^2}{s^3} \mathbf{n} \times ((\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\mathbf{v}}) \right] \quad (3.8) \end{aligned}$$

ここで最後の等式においてベクトル公式

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \times ((\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\mathbf{v}}) &= (\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta})(\mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{v}}) - \dot{\mathbf{v}}(\mathbf{n} \cdot (\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta})) \\ &= (\mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{v}}) \mathbf{n} - (1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}) \dot{\mathbf{v}} - (\mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{v}}) \boldsymbol{\beta} \end{aligned}$$

を使った.

(3.6)式は(3.7)式と(3.8)式の和なので

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{R}{s^3} (\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta})(1 - \beta^2) \right] \\ &\quad + \frac{\mu_0 q}{4\pi} \left[\frac{R^2}{s^3} \mathbf{n} \times ((\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\mathbf{v}}) \right] \end{aligned}$$

が得られ, (3.1)式が示された. ここで(3.7)式と(3.8)式の導出には $\epsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$ を使った.

3.2 磁場の表式(3.2)の導出

磁場は(2.6)式より

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) &= \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \\ &= \frac{\mu_0 q}{4\pi} \frac{\nabla \times [\mathbf{v}]}{[s]} + \frac{\mu_0 q}{4\pi} \left(\nabla \frac{1}{[s]} \right) \times [\mathbf{v}] \quad (3.9) \end{aligned}$$

(3.9)式右辺の第1項は公式(e)を用いて

$$\begin{aligned} &\frac{\mu_0 q}{4\pi} \left[\frac{1}{s} \right] \nabla t \times [\dot{\mathbf{v}}] \\ &\stackrel{(b,i)}{=} -\frac{\mu_0 q}{4\pi} \left[\frac{1}{s} \right] \left[\frac{R\mathbf{n}}{cs} \right] \times \left(\frac{\partial [\mathbf{v}]}{\partial t} \left[\frac{s}{R} \right] \right) \\ &= -\frac{1}{c} \frac{\mu_0 q}{4\pi} [\mathbf{n}] \times \left(\left[\frac{1}{s} \right] \frac{\partial [\mathbf{v}]}{\partial t} \right) \quad (3.10) \end{aligned}$$

(3.9)式の右辺第2項は

$$\begin{aligned} &\frac{\mu_0 q}{4\pi} \left[\frac{\mathbf{v}}{s^2} \right] \times \nabla [s] \\ &\stackrel{(h)}{=} \frac{\mu_0 q}{4\pi} \left[\frac{\mathbf{v}}{s^2} \right] \times \left([\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}] - \frac{[\mathbf{n}]}{c} \frac{\partial [s]}{\partial t} \right) \\ &= -\frac{\mu_0 qc}{4\pi} \left[\mathbf{n} \times \left(\frac{\boldsymbol{\beta}}{s^2} \right) \right] + \frac{1}{c} \frac{\mu_0 q}{4\pi} [\mathbf{n}] \times \left(\left[\frac{\mathbf{v}}{s^2} \right] \frac{\partial [s]}{\partial t} \right) \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{c} \left([\mathbf{n}] \times \left[\frac{\nabla [s]}{s^2} \right] \right) + \frac{1}{c} \frac{\mu_0 q}{4\pi} [\mathbf{n}] \times \left(\left[\frac{\mathbf{v}}{s^2} \right] \frac{\partial [s]}{\partial t} \right) \quad (3.11) \end{aligned}$$

ここで $\mathbf{v} \times \boldsymbol{\beta} = 0$ と最後の等式において

$$\left[\mathbf{n} \times \frac{\boldsymbol{\beta}}{s^2} \right] \stackrel{(h)}{=} -[\mathbf{n}] \times \left[\frac{\nabla [s]}{s^2} \right]$$

を使った. ここで (3.11)式の導出には $\epsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$ を使った.

(3.9)式は(3.10)式と(3.11)式の和なので磁場の表式

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{c} [\mathbf{n}] \times \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{s^2} \right] \nabla [s] - \frac{\mu_0 q}{4\pi} \left[\frac{1}{s} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \frac{\mathbf{v}}{s^2} \frac{\partial s}{\partial t} \right] \right) \\ &= \frac{1}{c} [\mathbf{n}] \times \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \quad (3.12) \end{aligned}$$

が得られ, (3.2)式が示された. ここで最後の等式において電場は(2.7)式であることを使った.

3.3 電場の表式(3.3)の導出

(2.5)式より

$$\begin{aligned} &-\nabla \phi(\mathbf{x}, t) \\ &\stackrel{(f)}{=} -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \nabla \left\{ \left[\frac{1}{R} \right] \left(1 - \frac{1}{c} \frac{\partial [R]}{\partial t} \right) \right\} \\ &\stackrel{(j)}{=} -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \nabla \left[\frac{1}{R} \right] - \frac{1}{c} \left[\frac{1}{R} \right] \frac{\partial}{\partial t} \nabla [R] - \frac{1}{c} \left(1 - \left[\frac{R}{s} \right] \right) \nabla \left[\frac{1}{R} \right] \right\} \\ &\stackrel{(k,l)}{=} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{c} \left[\frac{1}{R} \right] \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\mathbf{n}R}{s} \right] + \left[\frac{\mathbf{n}}{s^2} - \frac{\mathbf{n}}{sR} + \frac{\mathbf{n}}{sR} \right] \right) \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\mathbf{n}}{s} \right] + \left[\frac{\mathbf{n}}{sR} \right] \right) \quad (3.13) \end{aligned}$$

ここで最後の等式において

$$\frac{1}{c} \left[\frac{1}{R} \right] \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\mathbf{n}R}{s} \right] \stackrel{(1)}{=} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\mathbf{n}}{s} \right] + \left[\frac{\mathbf{n}}{sR} \right] - \left[\frac{\mathbf{n}}{s^2} \right]$$

を使った.

(2.6)式より

$$-\frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\boldsymbol{\beta}}{s} \right] \dots\dots\dots(3.14)$$

(3.13)式と(3.14)式より電場は

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\left[\frac{\mathbf{n}}{sR} \right] + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\mathbf{n}-\boldsymbol{\beta}}{s} \right] \right)$$

が得られ(3.3)式が示された.

3.4 Feynman と Heaviside による電磁場の表式(3.4) と(3.5)式の導出

(3.3)式は

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\left[\frac{\mathbf{n}}{sR} \right] + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\mathbf{n}-\boldsymbol{\beta}}{s} \right] \right) \\ &\stackrel{(1g)}{=} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\left[\frac{\mathbf{n}}{R^2} \right] - \frac{1}{c} \left[\frac{\mathbf{n}}{R^2} \right] \frac{\partial[R]}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \frac{c[\mathbf{n}] + \left[\frac{s}{R} \right] \frac{\partial[\mathbf{R}]}{\partial t}}{[s]} \right) \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \left[\frac{\mathbf{n}}{R^2} \right] - \frac{1}{c} \left[\frac{\mathbf{n}}{R^2} \right] \frac{\partial[R]}{\partial t} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\mathbf{n}}{s} \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\left[\frac{1}{R} \right] \frac{\partial[\mathbf{R}]}{\partial t} \right) \right\} \dots\dots\dots(3.15) \end{aligned}$$

(3.15)式の最右辺第 2 項と第 3 項の和は, 係数 $q/(4\pi\epsilon_0)$ を除いて

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{c} \left[\frac{\mathbf{n}}{R^2} \right] \frac{\partial[R]}{\partial t} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\mathbf{n}}{s} \right] \\ &= -\frac{1}{c} \left[\frac{\mathbf{n}}{R^2} \right] \frac{\partial[R]}{\partial t} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \left[\frac{\mathbf{n}}{R} \right] \left(1 - \frac{1}{c} \frac{\partial[R]}{\partial t} \right) \right\} \\ &= \left[\frac{R}{c} \right] \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\mathbf{n}}{R^2} \right] - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\left[\frac{\mathbf{n}}{R} \right] \frac{\partial[R]}{\partial t} \right) \dots\dots\dots(3.16) \end{aligned}$$

となる. ここで最後の等式において

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\mathbf{n}}{R} \right] &= \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \left[\frac{\mathbf{n}}{R^2} \right] [R] \right\} \\ &= \left[\frac{R}{c} \right] \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\mathbf{n}}{R^2} \right] + \frac{1}{c} \left[\frac{\mathbf{n}}{R^2} \right] \frac{\partial[R]}{\partial t} \end{aligned}$$

を使った. (3.15)式の最右辺第 4 項は, 係数 $q/(4\pi\epsilon_0)$ を除いて

$$\begin{aligned} &\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\left[\frac{1}{R} \right] \frac{\partial[\mathbf{R}]}{\partial t} \right) \\ &= \frac{1}{c^2} \left\{ \left[\frac{1}{R} \right] \frac{\partial}{\partial t} \left(\left[\frac{\mathbf{R}}{R} \right] [R] \right) \right\} \\ &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\mathbf{R}}{R} \right] - [\mathbf{R}] \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{R} \right] \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2[\mathbf{n}]}{\partial t^2} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\left[\frac{\mathbf{n}}{R} \right] \frac{\partial[R]}{\partial t} \right) \dots\dots\dots(3.17)$$

となる. ここで最初の等式において

$$\begin{aligned} &\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\left[\frac{1}{R} \right] \frac{\partial[\mathbf{R}]}{\partial t} \right) \\ &= \frac{1}{c^2} \left\{ \left[\frac{1}{R} \right] \frac{\partial}{\partial t} \left(\left[\frac{\mathbf{R}}{R} \right] [R] \right) \right\} \\ &= \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\mathbf{R}}{R} \right] + \left[\frac{\mathbf{R}}{R^2} \right] \frac{\partial[R]}{\partial t} \right) \\ &= \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\mathbf{R}}{R} \right] - [\mathbf{R}] \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{R} \right] \right) \end{aligned}$$

を使った.

(3.15)式の最右辺第 2 項と第 3 項に(3.16)式, 第 4 項に(3.17)式をそれぞれ代入すると

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\left[\frac{\mathbf{n}}{R^2} \right] + \left[\frac{R}{c} \right] \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\mathbf{n}}{R^2} \right] + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2[\mathbf{n}]}{\partial t^2} \right)$$

が得られ, (3.4)式が示された.

磁場の表式(3.5)は上式に(3.2)式を適用すると

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{c} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} [\mathbf{n}] \times \\ &\quad \left\{ \left[\frac{\mathbf{n}}{R^2} \right] + \left[\frac{R}{c} \right] \left(\left[\frac{1}{R^2} \right] \frac{\partial[\mathbf{n}]}{\partial t} + [\mathbf{n}] \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{R^2} \right] \right) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2[\mathbf{n}]}{\partial t^2} \right\} \\ &= \frac{\mu_0 q}{4\pi} \left(\left[\frac{\mathbf{n}}{R} \right] \times \frac{\partial[\mathbf{n}]}{\partial t} + \frac{1}{c} [\mathbf{n}] \times \frac{\partial^2[\mathbf{n}]}{\partial t^2} \right) \end{aligned}$$

が得られ, (3.5)式が示された.

4. 各種表式による電磁場の計算

本章の前半では, 図 2 のように, 原点を中心として半径 a の円軌道を速さ v で等速円運動をする, 電荷 q をもった, 粒子のつくる電磁場の表式を導出する. そして後半では, 本章の(4.1)式と(4.2)式を用いて, 図 2 の等速円運動をする荷電粒子のつくる電磁場を計算する.

最初に次の 2 式を導出する. 図 2 において, 現在の時刻を t , 遅延時刻を t' , 観測点 \mathbf{x} は z 軸上の点 $(0,0,h)$ とする. さらに荷電粒子は遅延時刻 $t'=0$ にちょうど位置 $(a,0,0)$ を通過しているとする. すなわち電磁場を計算している現在の時刻は

$$t = \frac{\sqrt{a^2 + h^2}}{c}$$

である. この電荷の位置は

$$[\mathbf{z}] = a(\cos \theta, \sin \theta, 0)$$

と表されるので

$$[\mathbf{R}] = \mathbf{x} - [\mathbf{z}] = (-a \cos \theta, -a \sin \theta, h)$$

となる. ここで

$$\theta = \frac{v}{a} t'$$

とおいた.

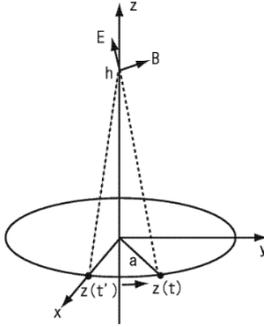


Fig.2 A charged particle in circular motion

このとき電場の表式(2.7)は

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = & \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \\ & \left(\frac{\epsilon_0\mu_0 v^2 (a^2 + h^2) - a^2}{a(a^2 + h^2)^{3/2}} \cos\theta + \frac{v}{c(a^2 + h^2)} \sin\theta, \right. \\ & -\frac{v}{c(a^2 + h^2)} \cos\theta + \frac{\epsilon_0\mu_0 v^2 (a^2 + h^2) - a^2}{a(a^2 + h^2)^{3/2}} \sin\theta, \\ & \left. \frac{h}{(a^2 + h^2)^{3/2}} \right) \dots\dots\dots(4.1) \end{aligned}$$

また磁場の表式(3.5)は

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = & \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \\ & \left(\frac{vh}{c^2(a^2 + h^2)^{3/2}} \cos\theta - \frac{\epsilon_0\mu_0 v^2 h}{ca(a^2 + h^2)} \sin\theta, \right. \\ & \frac{\epsilon_0\mu_0 v^2 h}{ca(a^2 + h^2)} \cos\theta + \frac{vh}{c^2(a^2 + h^2)^{3/2}} \sin\theta, \\ & \left. \frac{va}{c^2(a^2 + h^2)^{3/2}} \right) \dots\dots\dots(4.2) \end{aligned}$$

になることを示す.

4.1 (2.7)式から(4.1)式の導出(図2の場合)

図2の等速円運動の場合, (2.7)式において

$$\begin{aligned} [\mathbf{v}] &= v(-\sin\theta, \cos\theta, 0), \\ [s] &= \sqrt{a^2 + h^2}, \\ \nabla[s] &= \left(-\frac{a}{\sqrt{a^2 + h^2}} \cos\theta + \frac{v}{c} \sin\theta, \right. \dots\dots\dots(4.3) \\ & \left. -\frac{v}{c} \cos\theta - \frac{a}{\sqrt{a^2 + h^2}} \sin\theta, \frac{h}{\sqrt{a^2 + h^2}} \right), \\ \frac{\partial[\mathbf{v}]}{\partial t} &= \frac{v^2}{a} (-\cos\theta, -\sin\theta, 0), \\ \frac{\partial[s]}{\partial t} &= 0 \end{aligned}$$

になるので, (4.3)式を(2.7)式に代入すると

$$\begin{aligned} & \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{s^2} \right] \nabla[s] - \frac{\mu_0 q}{4\pi} \left(\left[\frac{1}{s} \right] \frac{\partial[\mathbf{v}]}{\partial t} - \left[\frac{\mathbf{v}}{s^2} \right] \frac{\partial[s]}{\partial t} \right) \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{a^2 + h^2}} \right)^2 \left(-\frac{a}{\sqrt{a^2 + h^2}} \cos\theta + \frac{v}{c} \sin\theta, \right. \\ & \left. -\frac{v}{c} \cos\theta - \frac{a}{\sqrt{a^2 + h^2}} \sin\theta, \frac{h}{\sqrt{a^2 + h^2}} \right) \\ & - \frac{\mu_0 q}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{a^2 + h^2}} \frac{v^2}{a} (-\cos\theta, -\sin\theta, 0) \dots\dots\dots(4.4) \end{aligned}$$

上式を $\epsilon_0\mu_0 = 1/c^2$ を使って, x, y, z 各成分について整理すると(4.1)式が得られる. すなわち電場の表式(2.7)は, 図2の等速円運動の場合に適用すると, (4.1)式になる.

また第3章では, 図2のように等速円運動をする荷電粒子に限らず, 一般的な加速度運動をする荷電粒子のつくる電場の各表式について

$$(2.7)式 = (3.1)式 = (3.3)式 = (3.4)式$$

が成り立つことを示した. したがって電場の表式(3.1), (3.3)と(3.4)も, 図2の場合に適用すると, 全て(4.1)式なる.

4.2 (2.7)式から(4.1)式の導出(図2の場合)

図2の円運動の場合, (3.5)式において

$$\begin{aligned} [\mathbf{n}] &= \frac{1}{\sqrt{a^2 + h^2}} (-a \cos\theta, -a \sin\theta, h), \\ [R] &= \sqrt{a^2 + h^2}, \\ \frac{\partial[\mathbf{n}]}{\partial t} &= \frac{v}{\sqrt{a^2 + h^2}} (\sin\theta, -\cos\theta, 0), \\ \left[\frac{\mathbf{n}}{R} \right] \times \frac{\partial[\mathbf{n}]}{\partial t} &= \frac{v}{(a^2 + h^2)^{3/2}} (h \cos\theta, h \sin\theta, a), \dots\dots\dots(4.5) \\ \frac{\partial^2[\mathbf{n}]}{\partial t^2} &= \frac{v^2}{a\sqrt{a^2 + h^2}} (\cos\theta, \sin\theta, 0), \\ [\mathbf{n}] \times \frac{\partial^2[\mathbf{n}]}{\partial t^2} &= \frac{v^2 h}{a(a^2 + h^2)} (-\sin\theta, \cos\theta, 0) \end{aligned}$$

になるので, (4.5)式を(3.5)式に代入すると

$$\begin{aligned} & \frac{\mu_0 q}{4\pi} \left(\left[\frac{\mathbf{n}}{R} \right] \times \frac{\partial[\mathbf{n}]}{\partial t} + \frac{1}{c} [\mathbf{n}] \times \frac{\partial^2[\mathbf{n}]}{\partial t^2} \right) \\ &= \frac{\mu_0 q}{4\pi} \left\{ \frac{v}{(a^2 + h^2)^{3/2}} (h \cos\theta, h \sin\theta, a) \right. \\ & \left. + \frac{1}{c} \frac{v^2 h}{a(a^2 + h^2)} (-\sin\theta, \cos\theta, 0) \right\} \end{aligned}$$

上式を $\epsilon_0\mu_0 = 1/c^2$ を使って, x, y, z 各成分について整理すると(4.2)式が得られる. すなわち磁場の表式(3.5)は, 図2の等速円運動の場合に適用すると, (4.2)式になる.

また第3章では、図2のように等速円運動をする荷電粒子に限らず、一般的な加速度運動をする荷電粒子のつくる磁場の各表式について

$$(3.2)式 = (3.5)式$$

が成り立つことを示した。したがって磁場の表式(3.2)も、図2の場合に適用すると、(4.2)式になる。

最後に図2の等速円運動をする荷電粒子のつくる電磁場について、(4.1)式により電場、(4.2)式により磁場の数値計算を行う。円の半径 $a=1\text{m}$ 、観測点の z 座標 $h=10\text{m}$ 、電荷 $q=1\times 10^{-6}\text{C}$ とする。このとき荷電粒子が観測点につくる電場を表1、また磁場を表2に示す。表において式番号の後の、Hは荷電粒子が高速 ($v/c=3\times 10^{-1}$) で運動している場合、またLは低速 ($v/c=1\times 10^{-5}$) で運動している場合の値であることを表す。ここで、物理定数は $c=2.99792\times 10^8\text{m/s}$ 、 $\epsilon_0=8.85419\times 10^{-12}\text{F/m}$ 、 $\mu_0=1.25664\times 10^{-6}\text{H/m}$ を使用した[3]。

比較のために Coulomb の法則[3]

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{x},t) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\mathbf{R}}{R^3} \right] \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(a^2+h^2)^{3/2}} (-a\cos\theta, -a\sin\theta, h) \quad \cdot (4.6) \end{aligned}$$

を用いて計算した電場を表1の最下行に示す。また Biot-Savart の法則[3]

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{x},t) &= \frac{\mu_0 q}{4\pi} \left[\frac{\mathbf{v} \times \mathbf{R}}{R^3} \right] \\ &= \frac{\mu_0 q}{4\pi} \frac{v}{(a^2+h^2)^{3/2}} (h\cos\theta, h\sin\theta, a) \dots\dots\dots(4.7) \end{aligned}$$

を用いて計算した磁場を表2の下2行に示す。

Table 1 Electric field of a charged particle in uniform circular motion

	Electric field $\mathbf{E}(\mathbf{x},t)$ [V/m]
(4.1)H	(71.632, -26.696, 88.544)
(4.1)L	(-8.8544, -8.8986 $\times 10^{-4}$, 88.544)
(4.6)	(-8.8544, 0, 88.544)

Table 2 Magnetic field of a charged particle in uniform circular motion

	Magnetic field $\mathbf{B}(\mathbf{x},t)$ [T]
(4.2)H	(8.8605 $\times 10^{-8}$, 2.6714 $\times 10^{-7}$, 8.8605 $\times 10^{-9}$)
(4.2)L	(2.9535 $\times 10^{-12}$, 2.9682 $\times 10^{-16}$, 2.9535 $\times 10^{-13}$)
(4.7)H	(8.8605 $\times 10^{-8}$, 0, 8.8605 $\times 10^{-9}$)
(4.7)L	(2.9535 $\times 10^{-12}$, 0, 2.9535 $\times 10^{-13}$)

5. おわりに

与えられた軌道に沿って加速度運動をする荷電粒子のつくる電磁場は Lienard-Wiechert ポテンシャル

に基づいて計算できる。この電磁場を計算する表式は Lienard, Heaviside, Feynman 等による各種表式がある。

本文では最初に、これらの各種表式が同一であることをベクトル解析を用いて示した。続いて原点の周りを等速円運動をする荷電粒子の場合について、電磁場の各種表式を利用して、電磁場の表式を求めた。

得られた電磁場の表式を使って、荷電粒子が高速で運動する場合と、低速で運動する場合について、電磁場の数値計算を行った。さらに比較のために Coulomb の法則と Biot-Savart の法則を使って電磁場を計算した。そして荷電粒子のつくる電磁場は、速度が高速から低速に変わるにしたがい、両法則による電磁場に漸近することも確認した。

参考文献

- [1] 太田浩一, “電磁気学の基礎II”, 東京大学出版会, 東京都, 2012.
- [2] R.P. Feynman, R.B. Leighton and M.I. Sands “The Feynman Lectures on Physics”, vol.2, Millennium ed., Basic Books, New York, 2011.
- [3] 太田浩一, “電磁気学の基礎I”, 東京大学出版会, 東京都, 2012.
- [4] J.D. Jackson, “Classical Electrodynamics”, 2nd ed., John Wiley & Sons, New York, 1975.

報告

日本語能力試験対策講座の実施報告

寺井 雅人*, 小林 直美*, 加藤 亨*, 裴 艶玲*

(2025年9月2日受理)

Japanese-Language Proficiency Test Preparation Courses: Implementation and Report

Masato TERAJ*, Naomi KOBAYASHI*, Toru KATO* and Yanling Pe*

(Received September 2, 2025)

Abstract

This paper reports on a project aimed at improving the Japanese proficiency of non-native speakers at Aichi University of Technology. The project consisted of three main components: the implementation of a preparatory course for the Japanese-Language Proficiency Test at the N1 and N2 levels, public outreach of the initiative, and the integration of the course into the official curriculum starting in 2025.

キーワード: 日本語教育, 外国語教育, 第二言語としての日本語, 留学, 資格試験

Keywords: Japanese Language Education, Foreign Language Education, Japanese as a Second Language, Study Abroad, Certification Exam

1. はじめに

日本における18歳人口減少による留学生の確保や、グローバル化による海外からの入国者の増加により、本学における日本語を母語としない学生の増加が今後予想される。日本語を母語としない学生は、留学生だけでなく、外国にルーツのある学生も対象となりうる。外国にルーツのある学生の中には、日本で義務教育を受けた学生だけでなく、比較的最近日本に住み始めた学生もいる。後者の場合、日本語での専門科目受講に不安を感じる学生が少なくない。文部科学省の報告によると(2024)、日本語指導が必要な外国籍の児童生徒の在籍人数は愛知県が約1.2万人と最も多く、2位の神奈川県と比較しても約二倍の数となっている。本学においても、日本語能力の不足により、講義についていけない外国人留学生や外国にルーツのある学生が散見されることが教職員から報告されている。

卒業(修了)後の進路についても、国内での就職に際しては一定水準の日本語能力が求められる。文部科学省による外国人留学生向け教育制度である「留学生就職促進教育プログラム認定制度」が、2021年

度より導入されている。このような制度が設けられている背景には、国内での就職において日本語能力(特にビジネス日本語能力)が留学生にとって大きなハードルとなっていることが指摘されている(文部科学省, 2023)。

以上の背景を踏まえ、本プロジェクトでは日本語能力試験を活用し、学生の日本語能力の向上を目的とした。具体的に、1) 日本語能力試験対策講座の開講および認定された学生への奨学金の付与、2) 日本語教育に関する本学の取り組みの発信、3) 1)の対策講座の2025年度の授業化を実施した。本プロジェクトは愛知工科大学2024年度教育改革・特別研究推進プロジェクトとして実施された(題目:『技術力と語学力を備えたグローバル人材育成のための、語学試験の活用』)。

2. 日本語能力試験について

日本語能力試験(JLPT)は、日本語非母語話者の日本語能力を測定し認定する世界最大規模の日本語の試験であり(国際交流基金・日本国際教育支援協会, 2025)、国内外で年二回開催されている。問題

* 愛知工科大学工学部, 〒443-0047 愛知県蒲郡市西迫町馬乗 50-2

Department of Engineering, Aichi University of Technology, 50-2 Manori, Gamagori 443-0047, Japan

は言語知識(文字・語彙・文法), 読解, そして聴解からなり, 回答は選択肢によるマークシート形式となる。日本語能力試験は能力のレベルが高い順に, N1 から N5 の 5 段階のレベルがある。各レベルの認定の目安は Table 1 の通りである。

Table 1 JLPT Levels and Descriptions

級	認定の目安
N1	幅広い場面で使われる日本語を理解することができる。
N2	日常的な場面で使われる日本語の理解に加え, より幅広い場面で使われる日本語をある程度理解することができる。
N3	日常的な場面で使われる日本語をある程度理解することができる。
N4	基本的な日本語を理解することができる。
N5	基本的な日本語をある程度理解することができる。

注. 日本語能力試験ホームページの表をもとに作成。

日本語能力試験のホームページで公開されているデータに基づき, 日本語能力試験の受験者数を図示した(Fig. 1)。Timing 1 は第一回, Timing 2 は第二回の試験を示す。2020 年は第二回のみ試験開催であり, また現時点で 2024 年第二回目のデータが公開されていないため, これら二つのデータはグラフに反映していない。Fig. 1 が示すように, 国内外の日本語能力試験の受験者数は, 2022 年から 2023 年にかけて大きく増加していることが分かる。

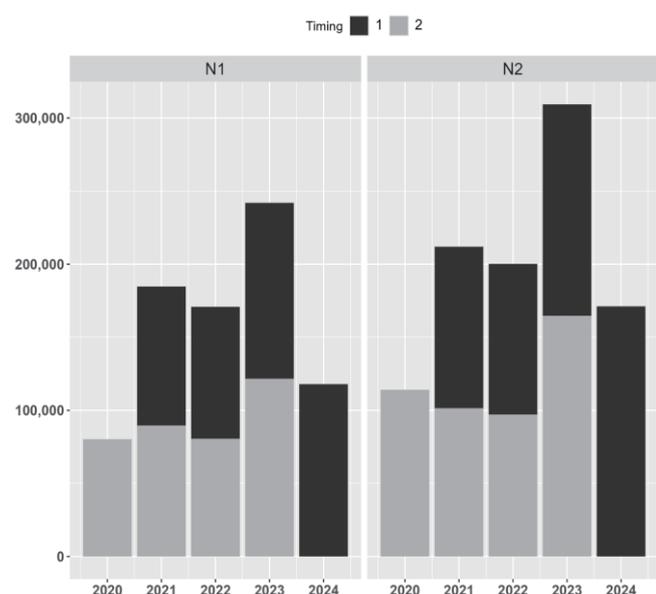


Fig. 1 The number of JLPT test takers

日本語能力試験のホームページで公開されている受講者の受験理由のうち, 上位の 3 つは, 「自分の実力が知りたい」(32%), 「自分の仕事やこれからの就職・昇給・昇進に役立つ(自分の国で)」(23.1%), そして「自分の仕事やこれからの就職・昇給・昇進に役立つ(日本で)」(10.3%)である。このように, JLPT の存在は, 日本語学習者にとって, 日本語学習を継続する強い動機づけになることが期待される。

株式会社ディスコキャリアスリサーチが 2023 年に公開した「外国人留学生の就職活動状況に関する調査」では, 外国人留学生採用時の JLPT の入社基準として, N1 が 26%, N2 が 26.7%, N3 から N4 が 9.1%, そして JLPT の基準を設けていない企業は 38.2%と報告している。よって, 半数以上の調査対象の企業が N2 以上の日本語力を入社基準として設けていることになる。また, 外国人留学生の保有レベルとして, 全体の 83.4%が N1 を保持しており, N2 保有者は 10.8%と報告されている。これらのデータが示す通り, 留学生が国内の企業を志望する場合, 日本語能力として N2 以上のレベルを求められる可能性は高く, また同時期に就職活動を行う外国人留学生が N2 以上を取得している可能性も高い。よって, 国内で就職活動を行う場合, N2 レベル以上の日本語能力を身につけておく必要がある。しかし, N1, N2 の合格率はそれぞれ 33.3%と 38.3%(2024 年第一回)であり, 比較的難易度の高い試験であることがわかる。そのため, 大学として資格取得を支援する仕組みを学生に提供することが望まれる。

3. 本プロジェクトの概要

本プロジェクトは以下の 3 点を目的とした。

1. JLPT 受験に向けた学習を通し, 日本語能力を向上させる
2. 日本語能力を向上させる本学の取り組みを学外に発信する
3. 対策講座を授業化する

以上の目的を達成するための取り組みとして, 1) JLPT 対策講座の開講および認定された学生への奨学金の付与, 2) 本プロジェクトの活動を大学のホームページへ掲載, そして 3) 学務課と連携した既存教育カリキュラムの変更を行った。本プロジェクトの概要は Fig. 2 の通りである。



Fig. 2 Project Overview

3.1 講座の立ち上げ

対策講座を担当する講師は、非常勤講師として募集を行った。日本語能力試験は、日本語母語話者の受験はできない。そこで、日本語の習熟度が比較的低い N2 対策講座受講希望者のクラスには日本語母語の講師を配置し、日本語の習熟度が比較的高い N1 対策講座には非日本語母語話者であるが、N1 を取得している講師を配置した。担当する講師が決まった後、担当講師と代表者である寺井がミーティングを行い、シラバス作成を進めた。対策講座の開始は後期とし、前期はすでに N1 を取得している学生を対象にした奨学金の募集を行った。奨学生に採択される条件として、愛知工科大学・大学院の学生で、2023年7月から2024年7月の間に行われた日本語能力試験で N1 を取得し、キャリアセンターで所定の期日までに申請書類を提出した学生とした。提出書類には、証明書のコピーの他、日本語能力試験合格に向けた勉強法や、今後の愛知工科大学での生活に対する抱負、そして広報活動への協力について記載した書類を含めた。プロジェクトメンバーによる選考の結果、1名の学生に対し奨学金を贈呈した。贈呈式の様子は後述の通り大学ホームページのニュース欄に掲載した。

第一次奨学金の募集の後、対策講座実施の周知として大学構内へのチラシの掲示を行った (Fig. 3)。



Fig. 3 Flyer for the Preparation Course

また、8月1日に、愛知工科大学の学習管理システムである AUT Portal にて、学生へのメッセージ機能を用いて講座開講の周知を行った。しかし、募集締め切りの期日をすぎてもなお登録者がゼロであったため、9月の後期オリエンテーションにて全学科、全学年に対し再度周知を行った。

参加希望者を対象に、日程調整のアンケートを実施し、開講可能曜日を担当講師と相談の上で決定した。また、事前に受講者の日本語能力のレベルや重点的に行いたい内容に関するアンケート事前実施し、シラバス作成の参考にした。

3.2 講座の開講

3.2.1 N1 対策クラス

3名の学生が N1 クラスに参加した。初回の講義では講義内容の説明を行ったり、教科書の内容を扱ったりした。2回目からは模擬試験を実施し、現状の受講生の日本語能力や問題を解く実践力を身につけられるようにした。4回目以降は教科書を使用しながら問題演習と解説を行った。宿題や小テストも実施した。振り返りを行う最後の講義を除き、二回目の JLPT が実施される (12月1日) 前に終了するように計画されていた (Table 2)。

Table 2 N1 Class Schedule and Course Content

回	日付	内容
1 2	9/26	ガイダンス, Unit 1 文法

3	10/3	模擬試験
4	10/10	Unit 2-3 文法, 演習問題, 小テスト
5	10/17	Unit 4-5 文法, 演習問題, 小テスト
6	10/24	Unit 6-7 文法, 演習問題, 小テスト
7	10/31	Unit 8-9 文法, 演習問題, 小テスト
8	11/7	Unit 10-11 文法, 演習問題, 小テスト
9	11/14	Unit 12-13 文法, 演習問題, 小テスト
10	11/21	模擬試験
12	11/28	復習とまとめ
13	12/5	アンケート, 学期全体の学習まとめと JLPT 振り返り

注. 講座では『新完全マスター語彙 日本語能力試験 N1』, 『新完全マスター漢字 日本語能力試験 N1』, 『新完全マスター文法 日本語能力試験 N1』, そして講師が作成した資料をもとに授業が行われた。

3.2.2 N2 対策クラス

N2 クラスは, 1 名のみ参加であった。受講生は JLPT に申し込みを行っておらず, 2025 年 12 月以降の試験での N2 取得を目指していた。よって, 開講スケジュールは受講生の希望に合わせて。N1 クラス同様に, 模擬試験を初回のガイダンスの後に実施し, その後は復習プリントや教科書の演習及び解説をもとに講座を実施した (Table 3)。

Table 3 N2 Class Schedule and Course Content

回	日付	内容
1	9/30	ガイダンス
2	10/7	模擬試験
3	10/21	模擬試験の復習
4	11/11	復習プリント①(模試復習), 演習問題, Unit 1 文法

5	11/18	復習プリント②(前時の復習), 演習問題, Unit 2-3 文法
6	11/25	復習プリント③(前時の復習), 演習問題, Unit 4-5 文法
7	12/9	復習プリント④(前時の復習) 演習問題, Unit 6-7 文法

注. 講座では『新完全マスター文法 日本語能力試験 N2』および講師が作成した資料を用いて授業が行われた。

3.3 プロジェクトの周知

留学生の日本語能力向上の取り組みを外部に発信するため, 本プロジェクトに関する 3 つの記事を愛知工科大学のホームページにて掲載した。それぞれの記事へのアクセス数などは Table 4 の通りである。表示回数に関して, 4 月 15 日までのデータと比較してもそれぞれ 10 から 20 回の増加が見られ, 公開から半年以上経過した現在でも記事へのアクセスが行われている。

Table 4 Overview of Articles and Access Metrics

タイトル	公開日	表示回数	平均エンゲージメント
「日本語能力試験対策講座を開講」	2024/10/7	183 回	42 秒
「日本語能力試験 N1 に合格した留学生の表彰式を行いました」	2024/11/7	195 回	24 秒
「日本語能力試験 N1 合格者の表彰式を行いました」	2025/3/11	89 回	26 秒

注. 2025 年 7 月 31 日時点でのデータ。

3.4 対策講座の授業化

対策講座では, 希望者のみを対象として行っていたが, ほとんど受講生が集まらなかった。また, 今回のようなプロジェクト費用に頼った講座運営では安定した講座の提供ができないと考え, 本講座の 2025 年度からの授業化に取り組んだ。新しい日本語クラスを作るわけではなく, 既存の日本語クラスを日本語対策講座

へ変更する手続きを行った。2年時の留学生必修科目である「日本語 3」そして、2年次の選択科目である「実用日本語」をそれぞれ「日本語能力試験対策 N2」、「日本語能力試験対策 N1」とした。さらに、カリキュラムの変更も行い、指定資格取得による単位変換を行える英語科目同様に、N2 を既に取得している学生は、それをもって「日本語能力試験対策講座 N2」の単位に置き換えるよう「大学以外の教育施設における学修の単位認定に関する規定」に日本語能力試験 N2 を追加した。それぞれの授業は、日本語能力試験対策講座 N1 を担当した非常勤講師が担当する。N2 対策講座を担当した非常勤講師にも講座内容等のヒアリングを行い、次年度の講座のシラバス設計に役立てた。2025 年度前期に開講された「日本語能力試験対策 N2」では 8 名の受講者が集まっている(2 年生 8 名)。今後の課題として、日本語能力試験は年 2 回であり、第一回の 7 月の申し込み期限は 4 月上旬ごろとなっている(2025 年度)。そのため、前期に開講される N2 クラスにおいては、TOEIC の講義のように定期試験として JLPT を受験することができない。よって、講義開始前から JLPT への申し込みを行うように学生に促す必要がある。

4. 最後に

外国語は短期間で身につくものではなく、継続した学習を通して身につける必要がある。JLPT は複数のレベルに分けて認定するため、読解と聴解に限っては自身の日本語力の目安として活用でき、またさらに上のレベルの取得を目指すことで日本語学習への動機づけが持続・向上することも期待できる。日本語力はテストの得点が全てではないが、言語力は目には見えない概念であるため、語学力をアピールするためには、テストや資格の結果によって可視化する必要がある。また上述のように、国内の企業での就職では、日本語能力試験で N2 以上の取得を基準とされる場合があり、また就活生には N1 を取得している留学生が数多く存在する。資格試験取得を一つの目標として、本学の学生が日本語力のさらなる向上に向け取り組んでくれることに期待をして末尾としたい。

謝辞

本プロジェクトにご協力いただきました学務課の新木訓典さん、キャリアセンターの小林美樹夫さん、森明智先生、喬婉姝先生、金田杏美先生に、心より感謝申し上げます。

参考文献

- [1] 株式会社ディスコ キャリタスリサーチ, “2024 年卒外国人留学生の就職活動状況に関する調査,” キャリタスホームページ (参照日: 2025 年 4 月 15 日, https://www.career-tasu.co.jp/wp/wp-content/uploads/2023/08/gaikokujinryugakusei_202308.pdf).
- [2] 国際交流基金・日本国際教育支援協会, 日本語能力試験公式ホームページ, 2025, (参照日: 2025 年 4 月 15 日, <https://www.jlpt.jp/>).
- [3] 文部科学省高等教育局参事官(国際担当) 付留学生交流室, “外国人留学生の就職促進について(外国人留学生の就職に関する取組等),” 独立行政法人日本学生支援機構 (参照日: 2025 年 8 月 24 日, https://www.jasso.go.jp/gakusei/career/event/guidance/_icsFiles/afieldfile/2023/06/06/1mnka_ryuugaku.pdf).
- [4] 文部科学省総合教育政策局国際教育課, “令和 5 年度日本語指導が必要な児童生徒の受入状況等に関する調査結果について,” 文部科学省ホームページ (参照日: 2025 年 8 月 1 日, https://www.mext.go.jp/content/20240808-mxt_kyokoku-000037366_4.pdf).

●業績リスト(2025.1～2025.12)

[著書]

中島守, 吉田昌央, 小野秀文, 高田富男, 平野博敏, 川村貴裕: 安全のころえ (2025 年度版), 学校法人電波学園 愛知工科大学自動車短期大学 (2025.3).

中島守, 掛布知仁, 高田浩充, 森勝行, 吉田昌央: 基礎数学 (2025 年度版), 学校法人電波学園 愛知工科大学自動車短期大学 (2025.3).

中島守, 河合末利, 森勝行, 永田英雄, 服部幸廣, 高田浩充, 掛布知仁, 川合宏之: 基礎工学 (2025 年度版), 学校法人電波学園 愛知工科大学自動車短期大学 (2025.3).

[論文/国際会議]

Takashi Yanagishita, Teppei Nariyama, Toshiaki Kondo and Hideki Masuda: Preparation of Fine Patterns without Residual Layers by Photonanoimprint Using PDMS Molds, Applied Engineering Materials, Vol.3, No.10, pp.3515–3524 (2025.10.1).

Toshiaki Kondo: Nanohole Formation Behavior During Anodizing Ga, AST 2025 Invited (2025.6.3).

Toshiaki Kondo: Anodization Behavior of Single-Crystal Gallium, AEPSE 2025 Invited (2025.11.4).

忠内洋樹: 挿入力センサを搭載した脳血管内治療遠隔操作ロボットの開発, 愛知工科大学博士論文 (2025.1.24).

大谷修, 西澤孝次, 藪下彰啓: 液体金属の機能化, 愛知工科大学紀要, 第 22 巻, pp.1–4 (2025.3.25).

磯貝正弘, 杉山太一: 1inch サイズの自律移動型マイクロロボットの開発(国際マイクロロボットメイイズコンテストカテゴリー2a 出場を目指したロボットの試作と実験), 愛知工科大学紀要, 第 22 巻, pp.5–14 (2025.3.25).

Takayuki Okubo, Ren Kano, Ikkei Kobayashi, Jumpei Kuroda, Daigo Uchino, Kazuki Ogawa, Keigo Ikeda, Taro Kato, Ayato Endo, Hideaki Kato and Takayoshi Narita: Experimental Consideration of Damping Effect According to Electromagnetic Position in Electromagnetic Guideway for Seamless Ultra-Thin Steel Plates, International Journal of Applied Electromagnetics and Mechanics, Vol.78, No.1–3, pp.68–73 (2025.3.28).

Ikkei Kobayashi, Fumiya Yoshida, Liting Fu, Yusuke Ebashi, Hayato Yamada, Jumpei Kuroda, Daigo Uchino, Kazuki Ogawa, Keigo Ikeda, Taro Kato, Ayato Endo, Mohamad Heerwan, Bin Peeie, Hideaki Kato and Takayoshi Narita: Dynamics Model of Differentials in Steady-State Cornering of a High-Performance Vehicle and Analysis of Effect on Handling Characteristics, SAE Technical Paper Series, Vol.1, 2025-01-5038 (2025.6.10).

Masahiro Yamataka, Yôiti Suzuki and Shouichi Takane: Effects of auditory information via a binaural auditory display on audio-visual object search performance in a VR environment, Sixth Joint Meeting Acoustical Society of America and Acoustical Society of Japan (2025.12.1).

Kota Mizukami, Daisuke Deguchi, Haruya Kyutoku and Hiroshi Murase: Study on Automatic Generation of Lecture Videos based on Content Analysis of Lecture Slides, 22nd International Conference on Cognition and Exploratory Learning in Digital Age (CELDA2025), pp.353-356 (2025.11.3).

松浦篤史, 清水創太: テキストと口唇動画像データによるマルチモーダル音声合成器の性能評価, 日本ロボット学会論文誌, Vol.43, No.9, 4 pages (2025.11).

Sota Shimizu, Miwa Takase and Takumi Morimoto: Approximate Representation of Gaze Rate using GMM, Proc. of IECON, 6 pages (2025.10.16).

Nanami Takagi, Haruya Kyutoku, Keisuke Doman, Takahiro Komamizu and Ichiro Ide: Analysis and Prediction of Attractive Fonts on Title-overlaid Food Image, The 19th International Conference on Machine Vision Applications (MVA2025), O3-1-3 (2025.7.28).

手塚一佳: 日本における六角竿ジョイントの歴史—金属フェルールから竹フェルールへ—, 超帳芸術学会, アタラシイアタリマエノカタチ (2) pp.40-48 (2025.7).

A. Haniz, H. Kawasaki, G. Hosokawa, T. Urushibata, Y. Yanagi, T. Kunitachi, H. Sawada and T. Matsumura: Multipath Parameter Optimization for Improving Accuracy of Ray-Tracing-based Received Power Prediction in Industrial Environments, IEEE Transactions on Vehicular Technology, Vol.74, No.5, pp.7881-7896 (2025.5).

古木淳也, 實廣貴敏: 音声対話システムにおけるゲシュタルトパターンマッチングによる質問種別推定, 愛知工科大学紀要, 第22巻, pp.15-21 (2025.3.25).

山高正烈: 背景音が緊急避難メッセージの印象評価に及ぼす影響, 愛知工科大学紀要, 第 22 巻, pp.22-27 (2025.3.25).

Sota Shimizu and Ryoya Takewaki: Tiny Wide Angle Fovea Sensor for Small Drone, Proc. of IEEEJ International Workshop on Sensing, Actuation, and Motion Control, pp.242-245 (2025.3.22).

Sota Shimizu: Development of Wide-Angle Fovea Lens Taking into Account Rapid Camera Work, Proc. of International Conference on Mechatronics (ICM) (2025.3.1).

Juki Tanimoto, Haruya Kyutoku, Keisuke Doman and Yoshito Mekada: Domain-Adaptive Object Detection by Using Refined Pseudo-Labels via Segmentation, International Workshop on Frontiers of Computer Vision 2025 (IW-FCV2025), OS9, 22 (2025.2.11).

田代徹, 黒石萌香: 結合自己組織化臨界モデルで探る太陽フレア統計則の起源, 愛知工科大学紀要, 第 22 巻, pp.28-33 (2025.3.25).

寺井雅人: RStudio ユーザーのための GitHub 入門, メソドロジー研究部会報告論集, 第 18 巻, pp.27-41 (2025.9.17).

Masato Terai: Perceptual Strength Differences in Single Words: A Network Analysis of First and Second Languages and Parts of Speech, Pacific Second Language Research Forum 2025 (2025.5.31).

寺井雅人: Google Apps Script を活用した欠席回数通知の自動化: 実装方法と学生アンケートによる評価, 愛知工科大学紀要, 第 22 巻, pp.61-67 (2025.3.25).

平野博敏, 小野秀文, 鈴木拓也: 非常時における自動車の給電システムの検証, 自動車整備技術に関する研究報告誌, 第 54 号 (2025.12.20).

甲村一貴, 巨藤誠, 服部幸廣: スラスト荷重とラジアル荷重が付与されて回転する大型車ホイール用ホイール・ボルトの軸力(第 3 報:ISO 規格のスチールホイール用ホイール・ナットと座金が著しく劣化している場合), 自動車整備技術に関する研究報告誌, 第 54 号 (2025.12.20).

[解説・総説]

近藤敏彰: ガリウムのアノード酸化挙動, 表面技術協会, Vol.76, No.9, pp.399-403 (2025.9).

大迫尚行: 有理関数のモジュロ演算を用いた定数係数線形微分方程式の微分演算子法, 愛知工科大学紀要, 第 22 巻, pp.40-46 (2025.3.25).

[口頭発表]

大瀬良祐真, 近藤敏彰: インジウムのアノード酸化挙動, 表面技術協会第 151 回講演大会 (2025.3.12).

永井一至, 近藤敏彰: ガリウムのアノード酸化におけるエレクトロルミネッセンスの観察, 表面技術協会第 151 回講演大会 (2025.3.12).

渡邊雄介, 近藤敏彰: 金ナノ粒子分散電解液中におけるアルミニウム合金のプラズマ電解酸化, 表面技術協会第 151 回講演大会 (2025.3.12).

水木一成, 近藤敏彰, 柳下崇, 益田秀樹: 陽極酸化皮膜の微小定電流回復によるバリアー層の構造変化, 表面技術協会第 151 回講演大会 (2025.3.12).

近藤敏彰, 荒川俊也: YOLO による画像トリミング自動化の試み, 第 41 回ファジィシステムシンポジウム (2025.9.3).

荒川俊也, 広瀬恭祐, 須永啓太, 細沼恵里, 近藤敏彰: 機械学習の材料インフォマティクスへの応用 - ガリウム結晶構造の推定を例にして -, 第 41 回ファジィシステムシンポジウム (2025.9.3).

近藤敏彰, 谷陽希: 非水系電解液中におけるガリウムのアノード酸化挙動, 表面技術協会第 152 回講演大会 (2025.9.10).

高木温朗, 裴艶玲: 簡易脳波計を用いた人間意図の推定, 日本機械学会東海支部 第 56 回学生員卒業研究発表講演会 (2025.3).

村口黎於奈, 田中俊行: 磁性粒子の鎖状化技術を用いたポータブル免疫測定装置の開発, 東三河地域研究センター第 31 回地域関連研究発表会 (2025.3.13).

大谷修, 藪下彰啓: 磁性粒子を含有した液体金属の特性評価, 日本化学会第 105 春季年会 (2025.3.28).

富永敬三, 裴艶玲, LI GUOXIU, 大日方五郎: 関節の“動きにくさ”をどう測る? ADL に影響する
膝関節強直を物理モデルで定量評価, 第 39 回リハ工学カンファレンス in 東京 (2025.8).

田中俊行: 磁気捕集を用いた迅速免疫測定法において磁性ナノ粒子の粒径分布が測定精度に
及ぼす影響, 第 49 回日本磁気学会学術講演会, 17aA-11 (2025.9.17).

忠内洋樹, 永野佳孝, 宮地茂, 川口礼雄, 松尾直樹: 血管内治療におけるワイヤ先端の挿入力
推定(第 2 報), 第 34 回日本コンピュータ外科学会大会 (2025.11.23).

大谷修, 藪下彰啓: 磁性粒子を含有した液体金属の特性評価とその応用性, 日本化学会中国四
国支部大会 (2025.11.24).

村上幸一, 滝康嘉, 梶村好宏, 今井一雅, 西尾正則, 中谷淳, 平社信人, 池田光優, 片山光亮,
若林誠, 徳光政弘, 高田拓, 北村健太郎: 高専連携技術実証衛星 4 号機「KOSEN-3」の軌道上
実証と次世代宇宙人材育成 (3), 第 69 回宇宙科学技術連合講演会, 1D09 (2025.11.25).

宮元一匡, 中谷淳, 梶村好宏, 村上幸一, 今井一雅: パルス型プラズマスラスタを搭載したキュー
ブサットの軌道解析, 第 69 回宇宙科学技術連合講演会, 1M14 (2025.11.25).

LI MINGYANG, 大岡侑菜, 田中俊行: 汗導電率および発汗量の測定を利用した熱中症遠隔監視
システムの開発, SICE 中部支部研究発表 & 企業交流会 2025, 2-11 (2025.11.26).

中谷淳: 高揚抗比形状による空力・重力アシスト軌道の ΔV 性能評価, 第 69 回宇宙科学技術連
合講演会, 3N12 (2025.11.27).

吉川遥菜, 出口大輔, 久徳遙矢: 手書き数式記述問題に対する自動採点システムの検討, 第 23
回情報学ワークショップ (WiNF2025), P3A-28 (2025.12.7).

清水一樹, 久徳遙矢, 道満恵介, 目加田慶人: 3 次元点群地図とカメラ画像のクロスモーダル粗
密照合による自車位置推定手法の検討, 第 23 回情報学ワークショップ (WiNF2025), P2B-30
(2025.12.7).

漆畑遥仁, 川西康友, 久徳遙矢: 複数人物に対する遮蔽の少ない撮影視点選択のための評価
指標の検討, 第 23 回情報学ワークショップ (WiNF2025), P2B-26 (2025.12.7).

山高正烈, 鈴木陽一, 高根昭一: 音刺激の種類と音源位置がリアクションタイムに及ぼす影響, 情報処理学会ヒューマンコンピュータインタラクション(HCI)研究報告(2025.11.26).

清水創太, 竹脇僚哉, 河村希典: 液晶中心窩センサのための TN シャッターの開発, 令和 7 年第 2 回産業計測制御研究会技術資料, IIC-25-024 (2025.10.31).

手塚一佳: 無節祭祀竿の制作 —和式六角竿の極北へ—, 芸術環境学会, 第 8 回全国大会 (2025.10.25).

山高正烈, 松永勝也: KM 式安全運転検査キットを用いた日中両国ドライバの運転行動の比較, 自動車技術会 2025 年秋季大会学術講演会予稿集 (2025.10.15).

山高正烈: VR サッカーキック時の時間伸縮が高次感性評価に及ぼす影響, 第 30 回日本バーチャルリアリティ学会大会論文集, 1A1-01 (2025.9.17).

深谷拓也, 山高正烈: VR 環境下におけるヘッドフォン型聴覚ディスプレイの音像定位精度, 日本音響学会 2025 年秋季研究発表会講演論文集, 2-Q-40 (2025.9.11).

清水創太, 竹脇僚哉, 河村希典: 5円形電極液晶レンズセルによる複数注目箇所への異なる焦点距離のレンズ効果の同時生成, 令和 7 年第 1 回産業計測制御研究会技術資料, IIC-25-017 (2025.8.22).

竹脇僚哉, 清水創太, 河村希典: 5円形電極液晶レンズセルによる複数注目箇所へのレンズ効果の同時生成, 令和 7 年第 1 回産業計測制御研究会技術資料, IIC-25-018 (2025.8.22).

清水創太, 竹脇僚哉, 河村希典: 5注目点液晶広角中心窩センサの設計, 2025 年度電気学会産業応用部門大会講演論文集 (2025.8.21).

水上皓太, 出口大輔, 久徳遙矢, 峰松翼, 村瀬洋: 講義スライドのコンテンツ解析に基づくハイライト表示付き講義動画の自動生成に関する検討, 第 28 回画像の認識・理解シンポジウム (MIRU2025)論文集, IS2-189 (2025.7.31).

高津悠生, 道満恵介, 川西康友, 久徳遙矢: 三次元点群地図に基づく鳥瞰反射強度画像とカメラ画像間の局所特徴照合による自車位置推定の検討, 第 28 回画像の認識・理解シンポジウム (MIRU2025)論文集, IS2-143 (2025.7.31).

神谷合音, 道満恵介, 川西康友, 久徳遙矢: 推し活アクスタ写真のための魅力的な構図選択手法の検討, 第 28 回画像の認識・理解シンポジウム(MIRU2025)論文集, IS1-154 (2025.7.30).

松浦璃久, 道満恵介, 久徳遙矢: 可視光カメラ用歩行者検出器の動作信頼度推定における 3 次元周辺環境特徴の併用に関する検討, 第 28 回画像の認識・理解シンポジウム(MIRU2025)論文集, IS1-150 (2025.7.30).

張超飛, 山高正烈: 割り込みあおり運転の抑制に効果的なメッセージの検討, 一般社団法人電子情報通信学会技術研究報告, Vol.125, No.92, pp.7-10 (2025.6.28).

國立忠秀: 屋内環境における環境発電の利用と高信頼無線通信に向けた取り組み, 電子情報通信学会センサネットワークとモバイルインテリジェンスフォーラム 2025 (2025.6.12).

文野太陽, 實廣貴敏: 音楽表現を考慮した自動採譜のための深層学習に基づく強弱記号の推定, 情報処理学会研究報告, 音楽情報科学(MUS) (2025.6.6).

國立忠秀: ユーザーレポート エミュレータの利用体験と今後への要望～ワイヤレスエミュレータの教育利用検討～, 令和 6 年度ワイヤレスエミュレータ利活用プレシンポジウム報告 (2025.3.28).

國立忠秀, 金森勝美, 緑谷侑季, 仁川颯太, 松田直通, 松下健治: エネルギーハーベスティングを利用した高信頼無線通信の実験検討, 電子情報通信学会総合大会, B-18-1 (2025.3.27).

水上皓太, 出口大輔, 久徳遙矢, 峰松翼, 村瀬洋: 講義スライドのコンテンツ解析に基づく講義動画の自動生成に関する予備検討, 情報処理学会 第 45 回教育学習支援情報システム(CLE)研究会, 18 (2025.3.21).

尾崎優也, 出口大輔, 久徳遙矢, 村瀬洋: 学習活動ログと講義スライドの併用による早期 At-risk 検出, 情報処理学会 第 45 回教育学習支援情報システム(CLE)研究会, 5 (2025.3.20).

清水創太: 4種類の広角中心窩視覚センサと産業応用, 2025 年度精密工学会春季学術講演会予稿集 (2025.3.18).

加藤動, Zhou Qihang, 北岡教英, 實廣貴敏: 異常検知技術に基づく畳み込み Autoencoder による非母国語話者の日本語発話誤り検出, 日本音響学会第 153 回(2025 年春季)研究発表会講演論文集 (2025.3.17).

木村秀星, 久徳遙矢, 道満恵介, 目加田慶人: チアリーディング演技動画からの集団ジャンプの自動採点, 電子情報通信学会メディアエクスペリエンス・バーチャル環境基礎研究会 (MVE), MVE2024-59, pp.156-161 (2025.3.6).

松浦璃久, 道満恵介, 久徳遙矢: 可視光カメラ用歩行者検出器の動作信頼度推定におけるLiDAR情報の併用に関する検討, 第17回データ工学と情報マネジメントに関するフォーラム (DEIM2025), 7J-04 (2025.3.4).

矢神充祐, 道満恵介, 久徳遙矢: 歩行者検出のためのシーンに応じた画素単位での車載可視光・遠赤外線カメラ選択, 第17回データ工学と情報マネジメントに関するフォーラム (DEIM2025), 7J-03 (2025.3.4).

高木七海, 久徳遙矢, 道満恵介, 駒水孝裕, 井手一郎: タイトル重畳料理画像における魅力的なフォントの分析と推定, 第17回データ工学と情報マネジメントに関するフォーラム (DEIM2025), 6E-05 (2025.3.4).

小國貴史, 川西康友, 久徳遙矢: しいたけの選別作業補助システム中の高負荷処理の軽量化に関する研究, 令和6(2024)年度電子情報通信学会 東海支部 卒業研究発表会, C-16 (2025.2.28).

熊谷侑汰, 赤木康宏, 久徳遙矢: 極座標画像の経時変化を用いたLiDAR点群のノイズ低減, 令和6(2024)年度電子情報通信学会 東海支部 卒業研究発表会, B-22 (2025.2.28).

樋江井捷, 川西康友, 久徳遙矢: 集合写真中のグループ内特異度を用いた姿勢が特徴的な人物の検出, 令和6(2024)年度電子情報通信学会 東海支部 卒業研究発表会, B-15 (2025.2.28).

北川司, 赤木康宏, 久徳遙矢: 三次元地図情報との対応関係を用いた信号機検出器用学習データの自動収集, 令和6(2024)年度電子情報通信学会 東海支部 卒業研究発表会, A-08 (2025.2.28).

山高正烈, 加藤奨: VR野球バッティング時の時間停止および音刺激の提示幅が高次感性に及ぼす影響, 情報処理学会インタラクシオン 2025, pp.874-877 (2025.2.23).

米田守重: 逆格子の理解のための初等線形代数からのアプローチ, 一般社団法人日本材料科学会 2025年度学術講演大会 (2025.5.29).

米田守重: 修正 Villain 定式化と凍結超伝導体を組み合わせた様々な双対変換, 物性研研究会
「熱場の量子論とその応用」-TQFT 2025 (2025.9.4).

田代徹, 輿石めぐみ, 出口哲生: 動的トイモデルで探るジップ則の普遍性の起源 II, 日本物理学
会第 80 回年次大会 (2025.9.18)

寺井雅人: 帰無仮説検定をもとにした回帰分析の検定の多重性について, メソドロジー研究部会
2025 年度第 1 回研究 (2025.7.13).

寺井雅人: 文脈提示の有無が言語理解時の色情報の活性化に与える影響, 第 24 回東海若手
実験心理学研究会 (2025.3.24).

平野博敏, 小野秀文, 鈴木拓也: 非常時における自動車の給電システムの検証, 第 57 回全国自
動車短期大学協会研究発表会 (2025.8.7).

甲村一貴, 巨藤誠, 服部幸廣: スラスト荷重とラジアル荷重が付与されて回転する大型車ホイ
ール用ホイール・ボルトの軸力(第 3 報:ISO 規格のスチールホイール用ホイール・ナットと座金が著
しく劣化している場合), 第 57 回全国自動車短期大学協会研究発表会 (2025.8.7).

[その他(受賞・セミナー講師・作品出展など)]

近藤敏彰: 電流回復操作によるアノード酸化ポーラスアルミナのバリア層の幾何学形状制御, 第
40 回 ARS 津軽コンファレンス (2025.11.13).

近藤敏彰: 陽極酸化, 令和 6 年度 業界対応専門研修(めっき技術) (2025.1.15).

近藤敏彰: 陽極酸化, 名古屋市工業研究所内セミナー (2025.2.28).

近藤敏彰: 光の不思議～虹色の宝石を作ろう～, 愛知工科大学 × 蒲郡市立図書館 サイエンス
広場 (2025.7.21).

近藤敏彰: 美しく役に立つ電気化学, 愛知県立豊橋西高等学校 総合科学科 1 年生 2025 大学
一日体験講座 (2025.8.8).

近藤敏彰: 陽極酸化, 令和 7 年度 表面機能化技術研修 (2025.9.19).

近藤敏彰: プラズマキャノンを化学する, 愛知県立蒲郡東高等学校 模擬授業 (2025.10.29).

小川和輝, 加藤亨: LEGO ロボットプログラミング, 蒲郡市立蒲郡南部小学校 (2025.1.15).

中谷淳: 宇宙開発のいまと愛知工科大での衛星開発, 愛知県立豊橋工科高等学校ロボット工学科 2 年生出前授業 (2025.2.10, 3.13).

LI GUOXIU: 膝関節の痙縮性を解析するアプリの開発, 第 31 回地域関連研究発表会 (2025.3).

小川和輝 加藤亨: 未来のエンジニア! 親子で学ぶプログラミング入門 ~レゴロボットプログラミングに挑戦しよう~, 親子 de サイエンスチャレンジ 2025, 特定非営利活動法人フロンティア西尾愛知こどもの国 (2025.7.6).

小川和輝: これはマジック? 目には見えない磁力を扱ってみよう!, 愛知工科大学×蒲郡市立図書館 サイエンスひろば (2025.7.19).

藪下彰啓: わたしたちの空気はキレイ!?, 愛知工科大学×蒲郡市立図書館 サイエンスひろば (2025.8.3).

中谷淳: 宇宙への挑戦! 大学で開発する超小型衛星の魅力と可能性, 2025 年度高大連携事業 豊橋西高校 大学一日体験講座 (2025.8.8).

小川和輝: メカトロニクス体験: マルチカラーLED のマイコンプログラミング, 2025 年度高大連携事業 豊橋西高校 大学一日体験講座 (2025.8.8).

上原雅行, 田中俊行: 岐阜大学主催「岐阜大学アントレプレナーシップ・サイエンス～生命科学教室～」(2024.8.19).

中谷淳, 宮元一匡: 航空宇宙フェア 2025 出展 (2025.8.23-24).

富永敬三, 裴艶玲, LI GUOXIU, 大日方五郎: ADL に影響する膝関節強直を物理モデルで定量評価アプリの開発, 第 20 回中部大学フェア 2025 (2025.9).

小川和輝: LEGO ロボットプログラミングワークショップ, GAMA HALLOWEEN 2025 (2025.10.18).

小川和輝, 加藤亨: 数学を活用した LEGO ロボットプログラミング, 2025 年度高大連携事業 愛知県立幸田高等学校出前授業 (2025.10.24, 31).

加藤高明, 鈴木貴博, 金井優, 畠山真伍, 松井彪流: 愛知県立蒲郡東高校生徒会との共同プロジェクト「アタラシイアタリマエノカタチ」の制作と投影 (2025.12.15).

手塚一佳, 中山咲, 田中宏治, 井坂弥生, 福寿美佐, 溝上将也, 瀬川真司, 上田達也, 岡田悠里: 超帳芸術学会展示会「アタラシイアタリマエノカタチ 2025」図録, 超帳芸術学会, pp.4, 6, 10, 11 (2025.11).

Sota Shimizu: Wide Angle Fovea Sensor and Gaze Rate for Communication with just a Glance between Human and Robot, 依頼講演, ISEC & University of Coimbra, Coimbra, Portugal (2025.10.20).

Sota Shimizu: Wide Angle Fovea Sensor and Gaze Rate for Communication with just a Glance between Human and Robot, 依頼講演, University of Genoa, Genova, Italy (2025.10.13).

手塚一佳: 「アニメ制作でまちおこし デジタルエンタメの世界」, 東三河産学官交流サロン (2025.9.24).

手塚一佳, 中山咲, 田中宏治, 井坂弥生, 福寿美佐, 溝上将也, 瀬川真司, 上田達也, 岡田悠里: 和式六角無節竿「無節祭祀竿」2本を新作展示, 超帳芸術学会展示会「アタラシイアタリマエノカタチ 2025」, 超帳芸術学会 (2025.8.29-31).

手塚研究室紹介: 「中電シーティーアイ Welcome Generation」, FM AICHI (2025.8.14).

加藤高明, 天野公平, 鈴木貴博, 金井優, 畠山真伍, 松井彪流: 名古屋市南区笠寺夏祭り「笠寺盆フェス」プロジェクト「アタラシイアタリマエノカタチ」の制作と投影 (2025.8.8-9).

手塚一佳: 第一回愛知工科大学出張講義「アニメ制作でまちおこし デジタルエンタメの世界」, 蒲郡市教育委員会 (2025.7.12).

久徳遙矢: 歩行者検出におけるシーンに応じた画素毎カメラ選択, 日本工業出版 画像ラボ 2025年6月号 (2025.6.5).

Sota Shimizu: Wide Angle Fovea Sensor and Next -High Performance Wide Angle Fovea Sensor and Non-mechanical Liquid Crystal Wide Angle Fovea Sensor-, 依頼講演, University of Padova, Vicenza, Italy (2025.5.19).

Sota Shimizu: Wide Angle Fovea Sensor and Next –High Performance Wide Angle Fovea Sensor and Non-mechanical Liquid Crystal Wide Angle Fovea Sensor–, 依頼講演, Proflin, Treviso, Italy (2025.5.14).

岡田拓真, 山高正烈: 生活環境音の最適再生法の一検討, 音コミュニケーション高度化研究会 第 19 回 JAIST-RIEC 交流会 (2025.2.17).

Masato Terai: The Influence of Task Types on the Activation of Object Color Information During Language Processing, Japan Second language Acquisition Research Forum Kansai 2025 招待講演 (2025.6.28).

寺井雅人: データ分析から報告書まで: R Markdown 講座 (外国語教育基礎研究部会主催特別セミナー) (2025.5.23).

加野章子: 学生相談検討会全体会議・研修講師「学生相談の動向と課題」 (2025.3.2).

加野章子: 名古屋大学精神医学教室心理グループ・研修講師「学生相談における心理職の実際」 (2025.6.20).

加野章子: 中村学園大学ハラスメント研修会・研修講師「ハラスメント相談員の役割」 (2025.9.5).

加野章子: 第 63 回全国学生相談研究会議・研修講師「保証人対応の留意点」 (2025.11.21-22).

加野章子: 広島学生相談研修会・研修講師「保証人対応」 (2025.12.12).

橋本孝明, 長谷川康和: 幸田町理科教室(きまぐれブルブルカー), 幸田町立図書館 (2025.8.24).

鵜飼達也: 電音部 Live The Melody of Wisteria, 愛知工科大学 (2025.5.25).

鵜飼達也: 電音部 Live De NoN Live in June, 愛知工科大学 (2025.6.15).

鵜飼達也: みんなで合奏しよう会, 愛知工科大学 (2025.9.14).

鵜飼達也: 電音部 Live AUT 祭 DeNoNLive2025, 愛知工科大学 (2025.10.11).

愛知工科大学紀要 第23巻 令和8年3月25日

紀要編集委員会

委員長 田代 徹
委員 山高正烈 鈴木宏昌
小川和輝 甲村一貴
松本吉生

発行者

学校法人 電波学園 愛知工科大学
愛知工科大学自動車短期大学

〒443-0047
愛知県蒲郡市西迫町馬乗 50-2
TEL : 0533-68-1135
FAX : 0533-68-0352
URL : <https://www.aut.ac.jp/>

